

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY
UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES

PAR

Paul ROLLAND

PREMIÈRE THÈSE

INSTABILITÉS ET ONDES CROISSANTES
PUISSANCE ABSORBÉE - OU ENGENDRÉE - PAR LES
DIFFÉRENTS MODES EXCITÉS DANS UN PLASMA

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 12 mai 1969 devant la commission d'examen

MM. GRIVET

Président

DELCROIX

TROCHERIS

CONSOLI

BERS

} Examinateurs

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES

PAR

Paul ROLLAND

PREMIÈRE THÈSE

INSTABILITÉS ET ONDES CROISSANTES
PUISSANCE ABSORBÉE - OU ENGENDRÉE - PAR LES
DIFFÉRENTS MODES EXCITÉS DANS UN PLASMA

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 12 mai 1969 devant la commission d'examen

MM. GRIVET

Président

DELCROIX

TROCHERIS

CONSOLI

BERS

} Examineurs



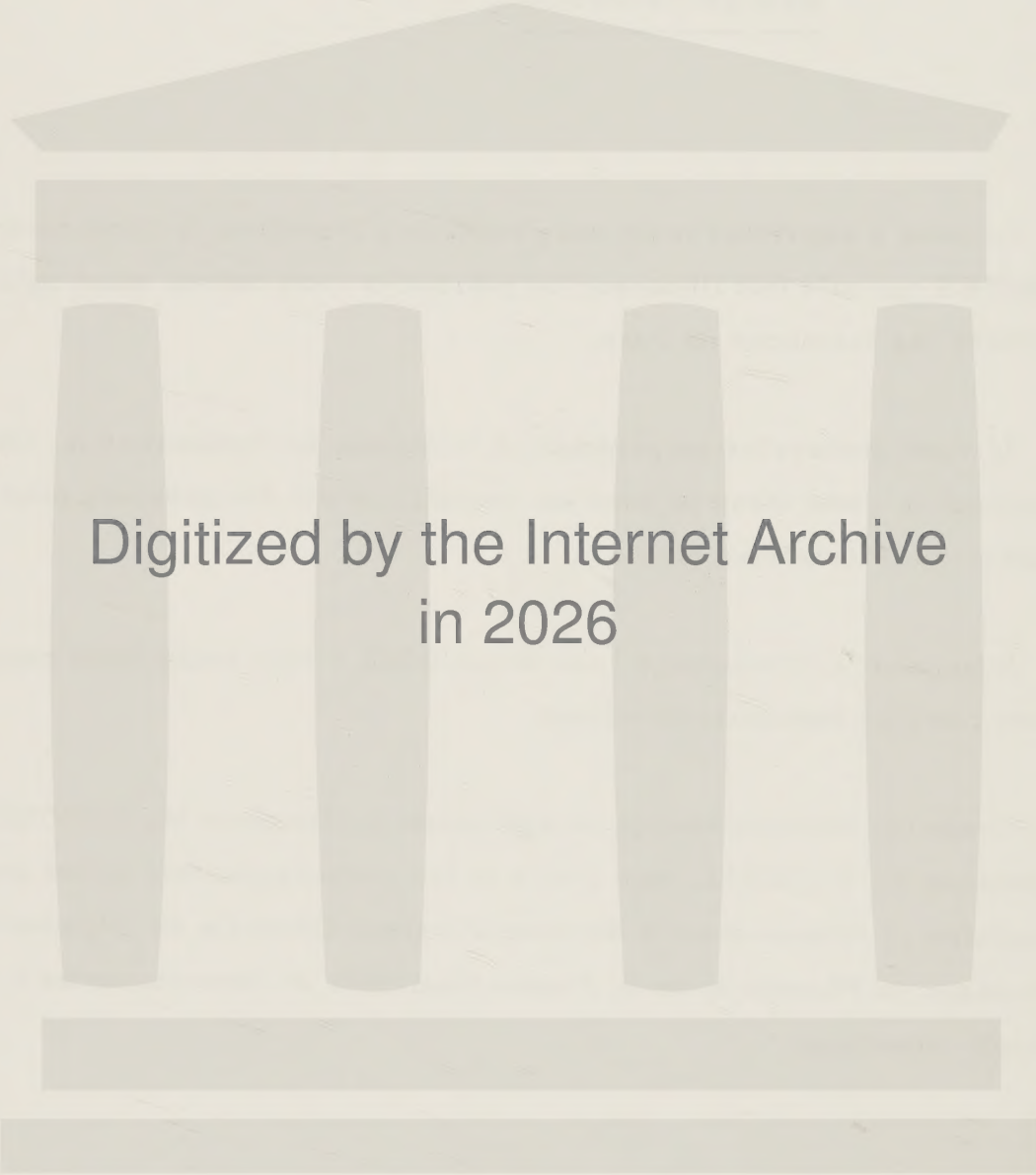
REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur P. GRIVET qui m'a fait l'honneur de patronner cette thèse, ainsi qu'à Messieurs les Membres du Jury.

Je veux remercier en particulier Monsieur le Professeur A. BERS, rapporteur de cette thèse et dont les conseils m'ont été précieux pour la rédaction de la deuxième partie.

Monsieur le Professeur J. L. DELCROIX a bien voulu faire partie du Jury : je l'en remercie vivement.

Toute ma reconnaissance va également à Monsieur M. TROCHERIS et Monsieur T. CONSOLI, dont l'aide et les encouragements m'ont permis de conduire ce travail dans le Service d'Ionique Générale du Département de Physique du Plasma et de la Fusion Contrôlée du Commissariat à l'Energie Atomique.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552201_0002

- SOMMAIRE -

La recherche de critères permettant de prévoir le développement d'instabilités dans un milieu ainsi que la nature - convective ou non - de celles-ci est depuis longtemps une préoccupation majeure des physiciens du plasma. Ce problème est étroitement lié à celui des ondes croissantes dans l'espace, et aux transferts d'énergie qui leur sont associés. En 1958, P.A. STURROCK a démontré l'insuffisance des critères existants et proposé une élégante théorie cinématique, conduisant à un critère basé sur la forme de la courbe de dispersion. Cependant, malgré les compléments mathématiques qui lui furent apportés, la théorie de STURROCK demeurait assez intuitive et ne s'appliquait qu'à des équations de dispersion de structure assez simple. En 1963, j'ai proposé une autre voie d'approche, purement analytique, basée sur les propriétés de la double transformation de LAPLACE. Cette méthode, qui est à l'abri des difficultés inhérentes à l'étude d'une onde isolée peut être schématisée de la façon suivante : On écrit les équations linéaires du "modèle multi-fluide" ; on pratique une double transformation de LAPLACE, dans l'espace et le temps, en introduisant les données initiales et limites ; parmi ces données figurent en général des données surabondantes, mais on ne sait pas à priori lesquelles. En réduisant le système, on obtient la transformée de l'une des grandeurs caractérisant le milieu. Cette transformée contient au dénominateur le noyau de dispersion du milieu et au numérateur toutes les données. On montre qu'une telle transformée doit être holomorphe dans deux demi-plans complexes associés. Or, cette propriété est en général compromise par certaines singularités provenant des zéros du noyau de dispersion. La solution de cette double difficulté (données surabondantes et singularités parasites) constitue la clé de notre méthode. En

imposant la condition d'holomorphie, on élimine certaines classes de singularités ainsi que les données surabondantes. Pour cela, on doit examiner les divers types de comportements des zéros du noyau de dispersion, ainsi que la localisation des points critiques autour desquels ces zéros permutent. La forme finale de la solution dépend des singularités qui subsistent. Le caractère -stable ou instable - du milieu, la nature - convective ou non - des instabilités éventuelles, la forme - croissante ou non - des ondes qui peuvent se propager, se révèlent liés à certaines propriétés de l'équation de dispersion, relatives au comportement des racines et à la localisation des points critiques. Le critère obtenu généralise celui de STURROCK.

Les critères cinématiques développés jusqu'ici ne disent rien sur le sens des échanges d'énergie entre les différentes composantes du milieu et pour les différents modes excités. Il nous a semblé intéressant de compléter cette description cinématique par une étude de l'énergie délivrée par la source et absorbée par le plasma, ou inversement générée par le plasma et recueillie par la source. L'intérêt théorique de cette étude est d'établir la jonction entre les critères cinématiques et les critères énergétiques. L'intérêt pratique en est de donner des formules simples directement utilisables pour l'expérimentateur. Pour inclure le cas des ondes croissantes associées aux instabilités convectives, ce problème est traité dans le cadre de la théorie du paquet d'ondes. On considère un courant de source allumé en un certain instant, et sinusoïdal dans le temps. On montre que le champ dans le milieu peut être représenté par une intégrale double généralisant la double transformation de FOURIER. Parmi les singularités de l'intégrand figurent les zéros du

noyau de dispersion ; Pour définir les parcours d'intégration, on est conduit à séparer ces singularités en deux classes et à faire appel au principe de causalité. L'expression du champ, dans laquelle on reconnaît l'effet d'écran, les modes progressifs amplifiés ou amortis, les transitoires et les fronts d'ondes, permet de calculer la puissance fournie ou recueillie par la source lorsque le régime permanent est atteint. Il apparaît que même en l'absence de collisions, la puissance échangée n'est pas nulle et que le sens de ce transfert d'énergie dépend uniquement de certaines propriétés du noyau de dispersion. Ce résultat permet d'établir une connexion avec les théories cinématiques des ondes croissantes, tout en précisant quels sont les modes générateurs d'énergie. Par exemple, dans l'interaction faisceau-plasma, on trouve que seule l'onde lente du faisceau est responsable de la relaxation, comme beaucoup d'auteurs le présumaient. De plus, on montre que cette absorption d'énergie due à la dispersion spatiale est identique à l'absorption due à l'effet LANDAU pour les grandes ondes, ce qui confirme le caractère cinématique de ce dernier, résultant d'un simple mélange de phases, et fait la jonction entre les théories cinétique et multifluide.

PUBLICATIONS CORRESPONDANT A CE TRAVAIL

C.R. Acad. Sc. Paris. 257, 1838 (1963)

Thèse 3ème cycle (1963)

Boeing Scientific Research Laboratories Scattle Wash D1-82-0347
(1964)

Physical Review 140, 776 (1965)

Rapport interne PA-IGn/RT 475 (1966)

Rapport CEA R.32-88 (1967)

C.R. Acad. Sc. Paris 265, 180 (1967)

C.R. Acad. Sc. Paris 265, 242 (1967)

Rapport EURATOM-CEA FC - 491 (1968)

- PREMIERE PARTIE -

INSTABILITES ET ON DES CROISSANTES

- PLAN -

I. INTRODUCTION

- A) Aspect physique du problème
- B) Formulation du problème

II. COMPORTEMENT D'UN MILIEU SEMI-INDEFINI

- A) Limitations de cette étude
- B) Avantages de la double transformation de Laplace
- C) Principe de la méthode
- D) Exemple illustratif
- E) Remarques préliminaires
- F) Milieu semi-indéfini dans $x \geq 0$. Forme de la solution
- G) Les différents cas à considérer
- H) Milieu semi-indéfini dans $x \leq 0$

III. COMPORTEMENT D'UN MILIEU INDEFINI

- A) Idée physique de base
- B) Forme générale du critère
- C) Forme simplifiée - Connexion avec le critère de Sturrock
- D) Connexion avec le critère de Bers et Brigg
- E) Exemples d'applications

IV. CONCLUSION

I.- INTRODUCTION

A) Aspect physique du problème

Un milieu soumis à une excitation à la limite ou en tout autre endroit, ou bien soumis à une perturbation initiale, peut se comporter de différentes façons : Si, dans un milieu indéfini, une perturbation initiale évolue en décroissant (figure 1a), le milieu est dit stable. Si elle croît tout en se propageant (figure 1b) on dit que le milieu est le siège d'une instabilité convective. Si elle croît dans le temps en chaque point, sans se propager (figure 1c), on dit que le milieu est le siège d'une instabilité non convective.

Dans un milieu semi-indéfini, une excitation à la frontière peut engendrer une onde non croissante (figure 2a, b) ou croissante dans l'espace (figure 2c) ou bien déclencher une instabilité non convective qui envahit progressivement tout le milieu et empêche l'établissement d'un régime permanent. Ce comportement est étroitement lié à celui d'une perturbation initiale, et reflète le caractère intrinsèque - stable ou instable - du milieu.

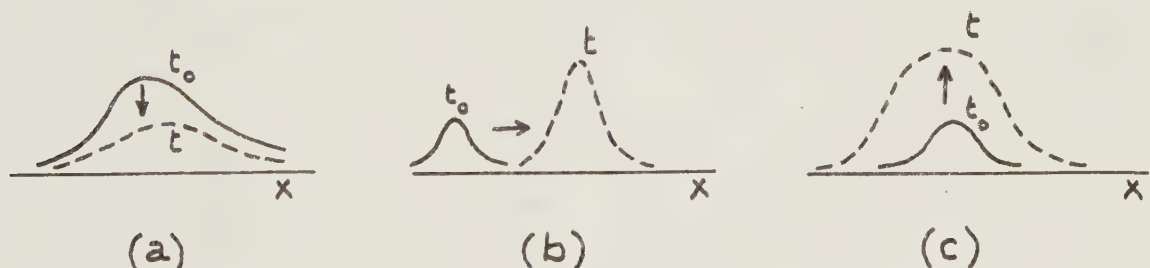


Figure 1 - Comportement d'un milieu indéfini soumis à une perturbation initiale.

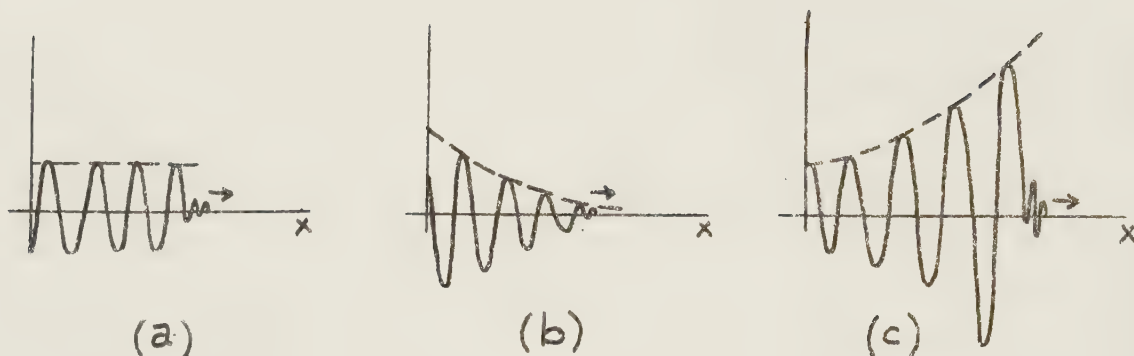


Figure 2

Comportement d'un milieu semi-indéfini soumis à une excitation à la frontière.

B) Formulation du problème

Considérons un milieu soumis à une perturbation donnée ; nous voulons savoir s'il existe une instabilité, si elle est convective ou non convective, et connaître le caractère des ondes constituant le régime permanent éventuel, c'est-à-dire savoir si elles sont croissantes ou décroissantes dans l'espace.

La donnée essentielle est l'équation de dispersion du milieu, comme l'a clairement pressenti Sturrock. Cependant, l'utilisation directe de l'équation de dispersion conduit à une difficulté bien connue, dans le cas le plus simple d'un milieu sans dissipation : résolue pour des valeurs réelles de ω (fréquence angulaire), elle donne des valeurs complexes conjuguées pour les nombres d'ondes, k et k^* , qui représentent aussi bien des ondes croissantes que des ondes décroissantes. En l'absence de tout critère, une difficulté identique apparaît quand l'équation est résolue pour k réel.

On peut envisager deux grandes voies d'approche pour lever l'ambiguïté signalée. On peut, comme l'a fait Sturrock /1/,

examiner les propriétés cinématiques d'un paquet d'ondes satisfaisant l'équation de dispersion. On peut aussi partir des équations différentielles du problème et tenter d'établir une connexion entre la forme de la solution et certaines propriétés de l'équation de dispersion. La classique transformation "Fourier-Laplace" employée par Jackson /2/ est un exemple d'une telle méthode.

En dépit des nombreux compléments mathématiques qui lui ont été apportés, en particulier par Polovin /3/, l'élégante théorie de Sturrock demeure assez intuitive, et il semble très difficile de lui donner une forme rigoureuse et suffisamment générale. De plus, cette théorie est d'une application délicate lorsque les coefficients de l'équation de dispersion sont complexes de sorte qu'il n'est plus possible de tracer la courbe de dispersion $\omega(k)$ dans des coordonnées réelles.

La transformation "Fourier-Laplace" semble plus rigoureuse. Si l'inversion de Fourier est effectuée la première, comme l'a fait Jackson, il est possible de prédire l'existence d'une instabilité, mais il est difficile d'obtenir une information sur sa nature convective ou non convective. Si l'on effectue d'abord l'inversion de Laplace, comme l'on fait Bers et Brigg /4/ pour ensuite déformer convenablement les contours d'intégration, on peut obtenir une information complète sur le comportement d'un milieu soumis à une excitation bien localisée. Mais ce procédé fait appel au principe de causalité, alors que dans la méthode suivante le principe de causalité est automatiquement satisfait grâce à une condition purement analytique, à savoir une condition d'holomorphie, qui élimine les fausses solutions.

L'idée physique de base de ce travail est de décrire le caractère du milieu d'après son comportement lorsqu'il est semi-indéfini et lorsque la seule excitation est une oscillation à sa frontière. On étudie d'abord le comportement de ce modèle idéal, à la fois pour $x \geq 0$ et pour $x \leq 0$, en utilisant une méthode purement analytique. Ensuite, grâce à des considérations physiques, on en déduit le caractère intrinsèque du milieu indéfini soumis à n'importe quelle sorte d'excitation /5/

II.- COMPORTEMENT D'UN MILIEU SEMI-INDEFINI.

A) Limitation de cette étude

Le milieu considéré dans ce chapitre est à une dimension, semi-indéfini, et la seule perturbation est une excitation à sa frontière. Ainsi, les conclusions de ce chapitre ne sauraient être appliquées sans précautions à un plasma réel, soumis à d'autres types d'excitations, et limité dans l'espace, ce qui peut produire la réflexion d'une instabilité convective et engendrer une instabilité non convective.

B) Avantages de la double transformation de Laplace

Comme l'a montré Sturrock, la croissance ou la décroissance des ondes dans l'espace dépend essentiellement de l'instabilité ou de la stabilité du régime transitoire qui précède ces ondes. Le fait suivant - presque évident intuitivement - est confirmé par le calcul : une onde croissante est précédée par un transitoire croissant et convectif, alors qu'une onde décroissante est précédée par un transitoire décroissant, et qu'une instabilité non convective ne constitue pas un transitoire et n'est suivie par aucun régime permanent.

On a utilisé la double transformation de Laplace dans le but d'obtenir simultanément le régime permanent et le transitoire, de façon à éviter les difficultés rencontrées dans l'étude d'une onde isolée.

Comme on le verra, on rencontre en général une double difficulté lorsqu'on effectue une double transformée de Laplace : tout d'abord, on est conduit à introduire des données initiales et limites surabondantes, sans qu'il soit possible de dire à priori lesquelles sont surabondantes ; ensuite, la transformée finalement obtenue - qui doit être holomorphe dans deux $\frac{1}{2}$ plans associés - ne présente en général apparemment pas cette propriété. La solution de cette double difficulté constitue la clé de notre méthode : en imposant la condition d'holomorphie, on élimine certaines classes de singularités, ce qui lève les ambiguïtés signalées tout en éliminant les conditions initiales et limites surabondantes.

Schématiquement, notre calcul est conduit de la façon suivante : on transforme sur x et t (coordonnées d'espace et de temps) le système d'équations linéaires du modèle "multi-fluide" ; on obtient par réduction la transformée de l'une des fonctions, sous la forme $F(p,q) = A(p,q)/H(p,q)$; le comportement des singularités $q(p)$ et la position des coupures dans le plan p nous fournissent les informations cherchées sur la forme de la solution $F(x,t)$ obtenue par une double inversion.

C) Principes de la méthode

1- On fait les hypothèses fondamentales suivantes : le milieu est semi-indéfini et uni-dimensionnel. Les fonctions qui caractérisent la perturbation, telles que le champ

électrique $E(x, t)$, sont continues, au moins par morceaux ; elles sont d'ordre exponentiel en x et t , pour tout observateur en translation uniforme ; cela signifie qu'il existe deux nombres réels fixes p_0 et q_0 tels que

$$|E(x, t)| \leq M \exp(q_0 x + p_0 t)$$

2- Les transformées sont définies de la façon suivante :

$$E(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty E(x, t) \exp(-(qx + pt)) dx dt$$

où $E(x, t)$ est définie pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$. L'intégrale définissant $E(p, q)$ converge pour les valeurs p_0 et q_0 définies ci-dessus. A fortiori, elle converge dans les demi-plans associés :

$$R(p) > p_0 \quad ; \quad R(q) > q_0$$

On montre aussi que $E(p, q)$ est analytique dans cette région. Si $E(p, q)$ n'était pas holomorphe dans les demi-plans associés $R(p) > p_0$, $R(q) > q_0$, cette fonction ne pourrait être la transformée de Laplace d'une fonction $E(x, t)$ continue par morceaux et d'ordre exponentiel. Cette remarque sera essentielle dans ce qui suit.

3- En appliquant cette transformation au système d'équations aux dérivées partielles du problème, on obtient le système transformé en p et q , dans lequel figurent explicitement les données initiales en $t = 0$ et limites en $x = 0$. Parmi ces données figurent en général des données surabondantes, introduites par les transformations, qu'il nous faudra éliminer.

4- On peut tirer de ce système l'une des transformées, par exemple $E(p, q)$, qui se présente sous la forme :

$$E(p, q) = A(p, q) / H(p, q)$$

La fonction $H(p, q)$ si on l'égale à zéro, donne l'équation de dispersion du milieu, écrite avec les variables $p = i\omega$, $q = ik$. La fonction $A(p, q)$ contient toutes les données, y compris les données surabondantes.

A et H sont des fonctions algébriques si l'on adopte le modèle "multi-fluide". Pour que $E(p, q)$ puisse être une transformée de Laplace, il doit exister deux demi-plans associés $R(p) > p_0$ et $R(q) > q_0$ dans lesquels $E(p, q)$ n'a pas de singularités.

5- Or, les zéros $q(p)$ de H peuvent évoluer de diverses façons lorsque $R(p)$ augmente. Certains de ces zéros $q(p)$ sont tels que $R(q)$ augmente indéfiniment lorsqu'on fait croître $R(p)$. Ces pôles ne restent pas à gauche de deux droites fixes $R(p) = p_0$ et $R(q) = q_0$, et donc compromettraient la condition d'holomorphie imposée à $E(p, q)$. Il faut donc les éliminer.

Pour cela, on doit écrire une condition supplémentaire à savoir que ces racines particulières de $H=0$ doivent aussi annuler le numérateur $A(p, q)$. Cette condition se traduit par un certain nombre d'équations (en général fonctionnelles) qui permettent d'éliminer les données surabondantes.

$A(p, q)$ devient, après division par les facteurs communs avec $H(p, q)$, une nouvelle fonction $B(p, q)$, et

les seules singularités qui subsistent sont telles que :

$$R(p) > p_0 \text{ entraîne } R(q) < q_0$$

En général, cette discrimination des racines de $H=0$ nous oblige à pratiquer dans le plan p des coupures qui rendent uniformes les diverses déterminations $q(p)$.

6- Il ne reste plus qu'à pratiquer une double inversion de Mellin-Fourier, en intégrant successivement sur les contours de Bromwich des plans (q) et (p) , ces contours laissant à leur gauche singularités et coupures.

L'exemple suivant, particulièrement simple, illustre ce procédé.

D) Exemple illustratif

Considérons le problème de la propagation d'une onde électrostatique dans un plasma, dans l'approximation macroscopique. On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles. On introduit les données à la limite $x = 0$ suivantes : la fluctuation de densité électronique $n(0, t)$, que l'on supposera de la forme $e^{i\omega_0 t}$ pour $t \geq 0$; le champ à la limite $E(0, t)$ sans savoir a priori si cette donnée est surabondante ; on supposera $v(0, t) = 0$ (réflexion spéculaire). Toutes les grandeurs sont définies dans $x \geq 0$ et $t \geq 0$.

1- Le système d'équations macroscopiques s'écrit, pour

les oscillations électroniques (ions au repos) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial n / \partial t + n_0 \partial v / \partial x = 0 \\ \partial E / \partial x + 4\pi e n = 0 \\ \frac{e}{m} E + \frac{a^2}{n_0} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

où n_0 est la densité électronique moyenne, n la perturbation de cette densité, v la perturbation de vitesse et a la vitesse thermique. La double transformation de Laplace de ce système nous donne le système transformé :

$$\left\{ \begin{array}{l} p n(p, q) + n_0 q v(p, q) = 0 \\ q E(p, q) - d(p) + 4\pi e n(p, q) = 0 \\ \frac{e}{m} E(p, q) + \frac{a^2}{n_0} [q n(p, q) - c(p)] + p v(p, q) = 0 \end{array} \right.$$

où l'on a posé :

$$c(p) = \int_0^{\infty} n(0, t) e^{-pt} dt \quad \text{et} \quad d(p) = \int_0^{\infty} E(0, t) e^{-pt} dt$$

On obtient la transformée de la densité sous la forme :

$$n(p, q) = \frac{\frac{e}{m} n_0 d(p) - a^2 q c(p)}{\omega_i^2 + p^2 - a^2 q^2}$$

où $\omega_1^2 = 4\pi n_0 e^2 / m$. On reconnaît au dénominateur l'équation de dispersion du plasma écrite avec les variables $p = i\omega$, $q = ik$.

2- Elimination de la donnée surabondante.

La transformée $n(p, q)$ doit être holomorphe dans deux demi-plans associés $R(p) > p_0$; $R(q) > q_0$, p_0 et q_0 étant des nombres fixes. Or les zéros du dénominateur sont :

$$q = \pm \alpha^{-1} (p^2 + \omega_1^2)^{1/2}$$

Il est clair que l'une de ces racines ne peut pas être admise comme singularité de $n(p, q)$, car elle tend vers p/α et sa partie réelle croît indéfiniment quand celle de p augmente. Ceci montre que l'une de nos données est surabondante. On va éliminer $d(p)$.

Soit $q^+ = +\alpha^{-1} (p^2 + \omega_1^2)^{1/2}$ la branche de $q(p)$ qui est réelle et positive quand p est réel et positif.

On rend la fonction $q(p)$ uniforme en traçant dans le plan p une coupure (figure 3,a) joignant les points critiques $\pm \omega_1$, et située dans R^- (à gauche de l'axe imaginaire). Ainsi, quel que soit p dans R^+ , la branche q^+ est dans R^+ et la branche q^- est dans R^- (figure 3,b)

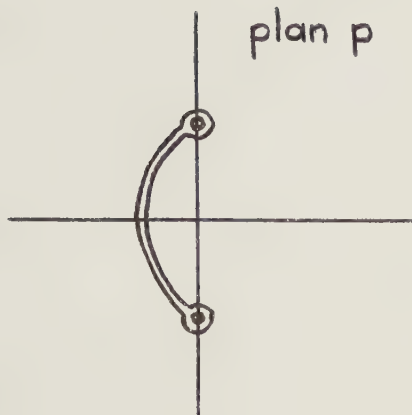


Fig 3 a.

Coupure dans le plan p ,
joignant les points
critiques $\pm i\omega_1$

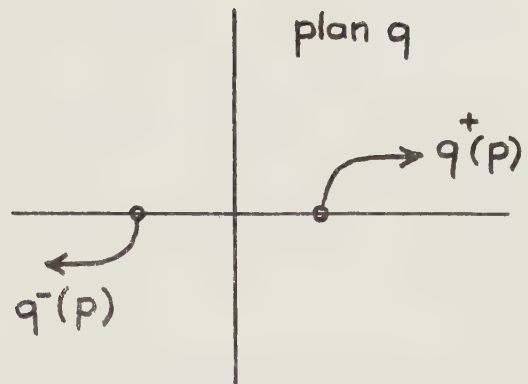


Fig 3 b.

Les deux branches q^+ et q^- dans
le plan q .

La racine q^+ doit annuler aussi le numérateur de $n(p, q)$
lorsque p est dans R^+ . Ceci se traduit par :

$$\frac{e}{m} n_0 d(p) - a^2 q^+(p) c(p) = 0$$

d'où l'on tire :

$$d(p) = (a m / n_0 e) (p^2 + \omega_1^2)^{1/2} c(p)$$

Ceci nous permet d'écrire $n(p, q)$ sous la forme :

$$n(p, q) = c(p) [q + a^{-1} (p^2 + \omega_1^2)^{1/2}]$$

où la détermination du radical est celle précisée plus haut.

La fonction $n(p, q)$ est ainsi uniforme dans le plan (q) tout entier et dans le plan p coupé. Si p est dans R^+ , $n(p, q)$ est holomorphe pour q dans R^+ et sa seule singularité est q^- située dans R^- . Si l'on choisit q dans R^+ , les singularités de $n(p, q)$ sont les pôles de $c(p)$, ainsi que la valeur de p telle que $(p^2 + \omega_1^2)^{1/2} = -aq$. Cette dernière singularité est dans R^- , si elle existe.

Ainsi, $n(p, q)$ est holomorphe dans les demi-plans associés $R(p) > p_0$; $R(q) > q_0$. Dans le cas particulier où les pôles de $c(p)$ sont purement imaginaires, la fonction $n(p, q)$ est holomorphe dans :

$$R(p) > 0 \quad ; \quad R(q) > 0$$

3- L'inversion. On va obtenir $n(x, t)$ par une double inversion de Mellin-Fourier dans les plans q et p , en intégrant successivement $n(p, q) \exp(qx + pt)$ sur les contours de Bromwich des plans q et p (figure 4 a, b)

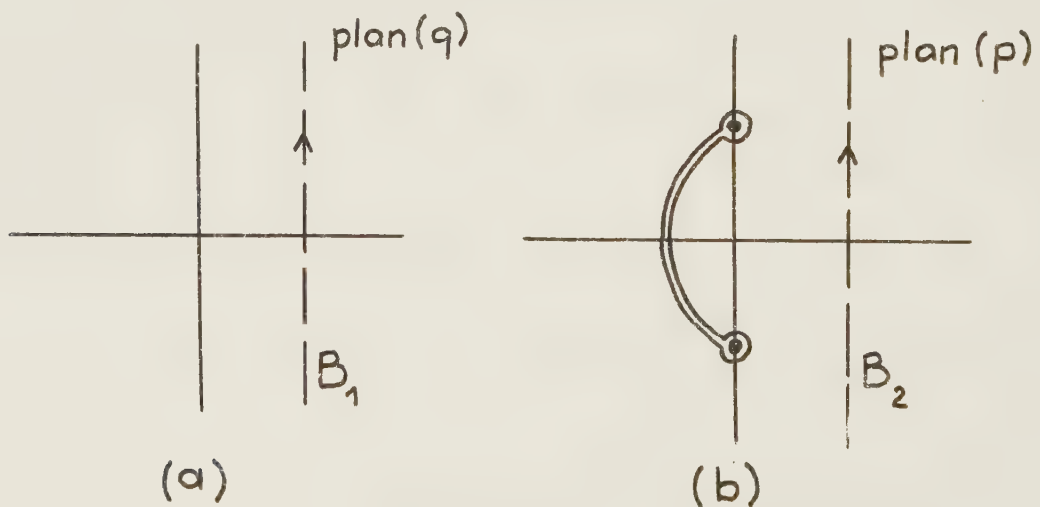


Fig4. Contours de Bromwich dans les plans q et p .

$$n(x,t) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{B_2} \int_{B_1} dp dq n(p,q) \exp(qx + pt)$$

$$\text{où } n(p,q) = c(p) / [q + \alpha^{-1}(p^2 + \omega_1^2)^{1/2}]$$

On note que $n(p,q)$ est parfaitement définie sur les contours de Bromwich. Intégrons d'abord dans le plan q . Pour p donné dans R^+ , la seule singularité de $n(p,q)$ est le pôle $q = -\alpha^{-1}(p^2 + \omega_1^2)^{1/2}$ qui se trouve dans R^- . En fermant le contour de Bromwich par le demi-cercle de l'infini dans R^- et en appliquant le théorème de Cauchy, on trouve :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{B_1} n(p,q) \exp qx dq = c(p) \exp [-(x/\alpha)(p^2 + \omega_1^2)^{1/2}]$$

Intégrons maintenant dans le plan p , en supposant que $n(0,t)$ est de la forme $\exp i\omega_0 t$, c'est-à-dire que $c(p)$ est de la forme $(p - i\omega_0)^{-1}$. On a :

$$n(x,t) = \frac{1}{2i\pi} \int dp \exp pt \frac{\exp [-(x/\alpha)(p^2 + \omega_1^2)^{1/2}]}{(p - i\omega_0)}$$

La technique d'intégration dépendra de la valeur de t comparée à celle de x/α . En effet, lorsque p tend vers l'infini, l'intégrand tend vers $p^{-1} \exp [p(t - x/\alpha)]$. Ainsi, pour $t < x/\alpha$, le contour B_2 sera fermé par le demi-cercle de l'infini dans R^+ (figure 5 a) alors que pour $t > x/\alpha$ il sera fermé par le demi-cercle de l'infini dans R^- (figure 5 b) et raccordé aux deux bords de la coupure.

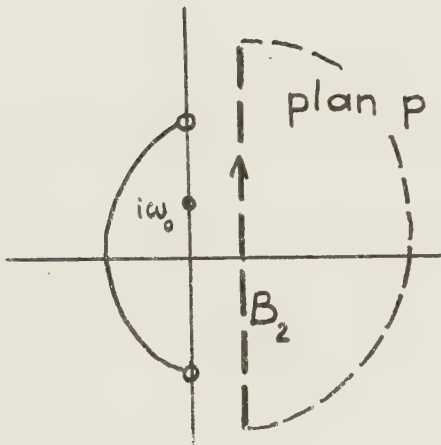


Fig5(a).

Fermeture du contour B_2
lorsque $t < x/a$

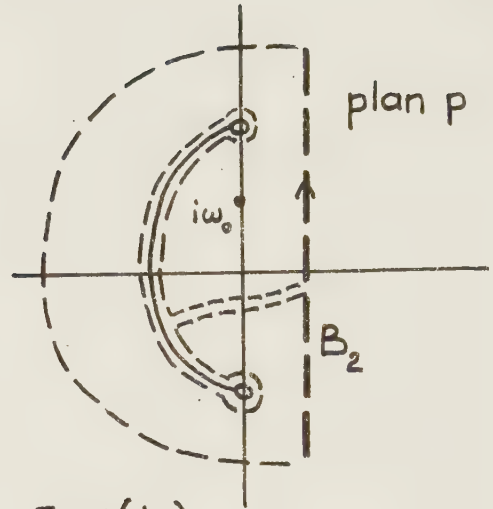


Fig5(b).

Fermeture du contour B_2
lorsque $t > x/a$

Pour $t < x/a$, on trouve $n(x,t) = 0$

Pour $t > x/a$, on trouve

$$n(x,t) = \exp[i\omega_0 t - (x/a)(\omega_1^2 - \omega_0^2)^{1/2}] - J(x,t)$$

où $J(x,t)$ est la contribution du circuit entourant la coupure.

4- $J(x,t)$ représente le transitoire. On va montrer que $J(x,t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. On voit (figure 6) que :

$$2i\pi J(x,t) = \int_{T_2} dp \exp pt \frac{\exp[-(x/a)(p^2 + \omega_1^2)^{1/2}]}{(p - i\omega_0)} + \int_{\gamma_2} + \int_{T_1} + \int_{\gamma_1}$$

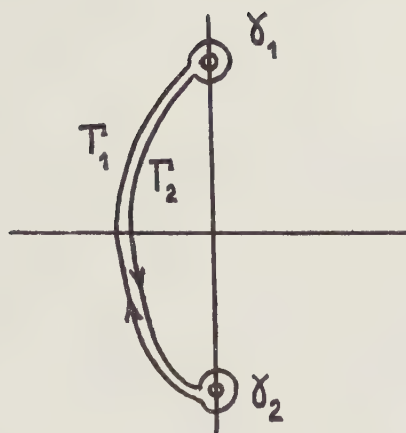


Fig 6. Contributions du circuit entourant la coupure.

Les intégrales sur les petits cercles γ_1 et γ_2 sont nulles d'après le lemme de Jordan. En effet :

$$(p+i\omega_1)(p-i\omega_0)^{-1} \exp\left[-(x/a)(p^2+\omega_1^2)^{1/2}\right] \exp pt \rightarrow 0 \text{ quand } p \rightarrow -i\omega_1$$

Associions maintenant les deux bords T_1 et T_2 , en notant que le radical change de signe sur ces deux bords :

$$2i\pi J(x,t) = \int_{T_1} dp \exp pt \frac{\exp[(x/a)(p^2+\omega_1^2)^{1/2}] - \exp[-(x/a)(p^2+\omega_1^2)^{1/2}]}{(p-i\omega_0)}$$

Posons

$$U(p,x) = (p-i\omega_0)^{-1} \left\{ \exp[(x/a)(p^2+\omega_1^2)^{1/2}] - \exp[-(x/a)(p^2+\omega_1^2)^{1/2}] \right\}$$

Cette fonction U est continue sur T_1 , bornée, et s'annule aux limites $p = \pm i\omega_1$. En intégrant par parties, on obtient :

$$2i\pi J(x,t) = \left[U(p,x) \frac{\exp pt}{t} \right]_{-i\omega_1}^{i\omega_1} - \int_{T_1} dp \frac{\exp pt}{t} \left(\frac{dU}{dp} \right)$$

où le terme $[]$ est nul. L'intégrale sur T_1 est absolument

convergente, car (dU/dp) se comporte comme $(p \pm i\omega_1)^{-1/2}$ lorsque p tend vers $\mp i\omega_1$. Donc :

$$2i\pi J(x,t) t = - \int_{T_1} dp \exp pt \left(\frac{dU}{dp} \right)$$

Mais sur T_1 , on a $|\exp pt| \leq 1$ puisque la coupure est située dans R^- . On peut donc majorer en module l'intégrale sur T_1 , et :

$$2i\pi t |J(x,t)| < \int_{T_1} \left| \frac{dU}{dp} \right| ds$$

où s est l'abscisse curviligne de p . Cette dernière intégrale étant indépendante de t , on en conclut que :

$$J(x,t) \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty$$

5- Conclusion : On voit que le front d'onde se déplace à la vitesse thermique a ($x = at$). En avant de ce front ($x > at$) le milieu n'est pas perturbé. En arrière de ce front, le transitoire laisse derrière lui une onde évanescence si $\omega_0 < \omega_1$ (figure 7 a, b)

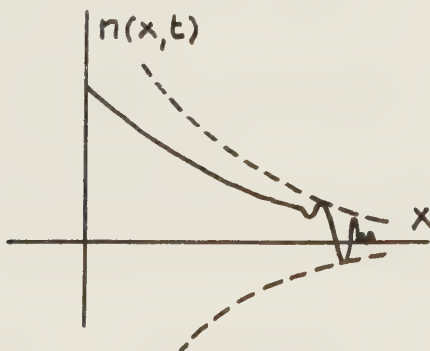


Fig 7 (a)

Front d'onde et transitoire, suivis d'une onde évanescence, à un instant donné.

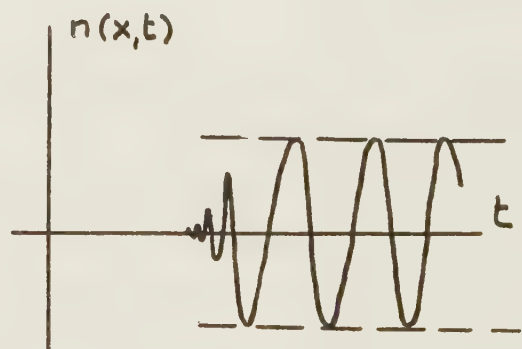


Fig 7 (b)

Amplitude de l'onde en fonction du temps, en un point donné de l'espace.

Une telle étude peut être entreprise pour des problèmes plus complexes, lorsque plusieurs composantes (électrons, ions, faisceaux, etc ...) sont en présence. Mais alors le degré de l'équation de dispersion devient supérieur à deux et il devient difficile ou même impossible d'explicitier les racines. Il est donc intéressant de prévoir la forme de la solution sans mener explicitement le calcul, par le simple examen des propriétés de l'équation de dispersion. Tel est l'objet des chapitres suivants, qui présentent une étude générale. Nous suivrons une méthode de calcul identique à celle du précédent cas particulier, et les quelques remarques qui suivent orienteront cette analyse.

E- REMARQUES PRELIMINAIRES

Le cas particulier que nous venons d'étudier suggère les remarques suivantes :

1) Il existe une solution continue en x pour $0 \leq x < at$, c'est-à-dire qu'il existe un régime permanent. Cette propriété est liée au fait que nous avons pu tracer la coupure dans R^- , ce qui nous a conduit à trouver un transitoire convectif, disparaissant en chaque point au bout d'un temps infini. Si l'un des points critiques avait été dans R^+ , $J(x,t)$ aurait été une fonction croissante du temps, donnant lieu à une instabilité non convective, ne permettant l'établissement d'aucun régime permanent. La solution aurait alors été discontinue dans l'espace en $x=0$.

2) On voit aussi pourquoi ce régime permanent est en forme d'onde décroissante, c'est-à-dire pourquoi seule la détermination

négative du radical apparaît dans la solution. C'est parce que pour $p = i\omega_0$, la seule racine q retenue comme singularité de la transformée $n(p, q)$ se trouve dans R^- . Rappelons que cette racine satisfait la condition suivante : il existe deux nombres fixes p_0 et q_0 tels que $R(p) > p_0$ entraîne $R(q) < q_0$. Si la racine satisfaisant cette condition s'était trouvée dans R^+ pour $p = i\omega_0$, nous aurions trouvé une solution croissante dans l'espace.

En reprenant pas à pas les différentes étapes de cette méthode et en examinant systématiquement les différentes éventualités, nous allons trouver un critère permettant de prévoir le comportement du milieu par le seul examen des propriétés de l'équation de dispersion.

P- Milieu semi-indéfini dans $x \geq 0$. Forme de la solution.

1) Le système d'équations à résoudre est obtenu de la façon suivante:

Le milieu est décomposé en un certain nombre de "composantes" 1, 2, .., convenablement choisies (par exemple un plasma isotrope + un faisceau dirigé, etc ... voir figure 8)

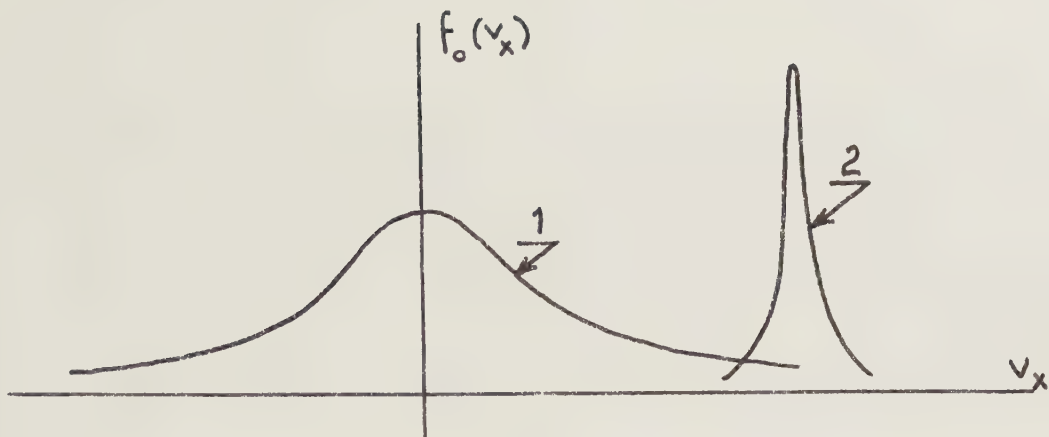


Fig 8. Distribution de vitesses pour un plasma à deux composantes = plasma isotrope + faisceau.

On écrit ensuite les équations macroscopiques linéarisées pour chacune de ces composantes. Ces équations sont couplées par les équations de Maxwell.

2) La double transformation de Laplace nous permet alors de tirer la transformée $F(p, q)$ de la grandeur $F(x, t)$ qui nous intéresse ; on obtient $F(p, q)$ sous la forme :

$$F(p, q) = A(p, q) / H(p, q)$$

A et H sont des fonctions algébriques de p et q . A contient en général des données surabondantes, introduites par les transformations.

Les singularités de $F(p, q)$ doivent être telles qu'il existe deux nombres fixes p_0 et q_0 tels que F soit holomorphe dans les demi-plans associés :

$$(1) \quad R(p) > p_0 \quad ; \quad R(q) > q_0$$

Ces singularités sont de deux sortes: les unes sont fixes, ce sont celles qui proviennent des conditions limites contenues dans A , comme par exemple le pôle $p = i\omega_0$ dû à la condition limite de la forme $\exp i\omega_0 t$. Les autres, correspondant aux zéros de H , sont mobiles, et donc susceptibles de compromettre la condition d'holomorphic.

3) Ainsi, il nous reste à trouver les racines $q(p)$ de $H(p, q) = 0$ qui ne satisfont pas la condition d'holomorphic, c'est-à-dire celles dont la partie réelle croît indéfiniment lorsque la partie réelle de p augmente (figure 9 a, b).

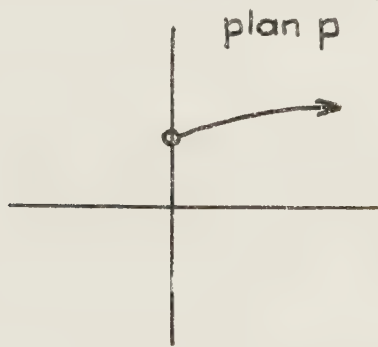


Fig 9 (a).

Trajet décrit par p tel que $R(p)$ croisse indéfiniment.

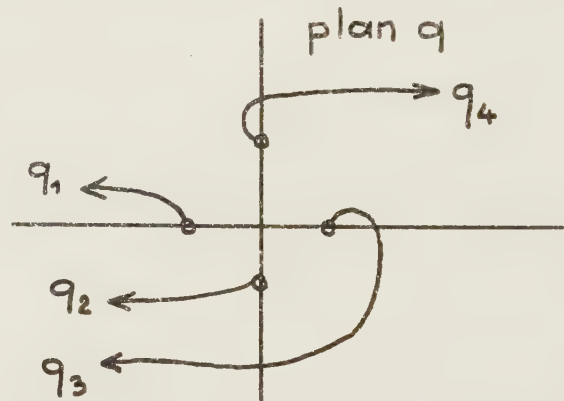


Fig 9 (b).

Divers comportements des racines $q(p)$ lorsque $R(p)$ croît indéfiniment.

Si toutes les racines $q(p)$ satisfont la condition

$$(2) \quad R(p) > p_0 \rightarrow R(q) < q_0$$

alors la fonction F est bien holomorphe dans les demi-plans

associés (1) ; De plus, F est uniforme dans le plan p tout entier, puisque la rotation de p autour d'un point critique de la fonction $q(p)$ produit simplement une permutation des zéros $q_k(p)$ du polynôme $H(p, q) = [q - q_1(p)][q - q_2(p)] \dots [q - q_n(p)]$.

Si par contre, certaines racines $q(p)$, que nous appellerons $q_m(p)$, ne satisfont pas la condition (2), nous devons les éliminer. Tel est le cas de la racine q_4 de la figure 9 b. Cette élimination de certaines singularités $q_m(p)$ a pour conséquence que $F(p, q)$ n'est plus une combinaison symétrique des racines $q(p)$ de l'équation $H(p, q) = 0$, puisque certains facteurs $[q - q_m(p)]$ disparaissent du produit $H(p, q) = (q - q_1)(q - q_2) \dots$

Dans ce cas, il faut empêcher les racines retenues $q_n(p)$ de permuter avec les racines rejetées $q_m(p)$. Dans ce but, on doit tracer dans le plan p un certain nombre de coupures, joignant les points critiques P autour desquels certaines racines q_n permutent avec certaines racines q_m .

Si aucun point critique P ne se trouve dans R^+ , il est possible de tracer toutes les coupures dans R^- (figure 10 a). Si l'un au moins de ces points P se trouve dans R^+ , certaines parties des coupures se trouvent dans R^+ (figure 10b)

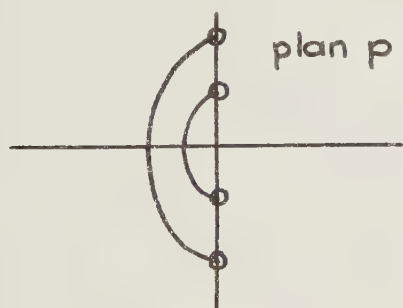


Fig 10 (a)

Cas où toutes les coupures peuvent être tracées dans R^-

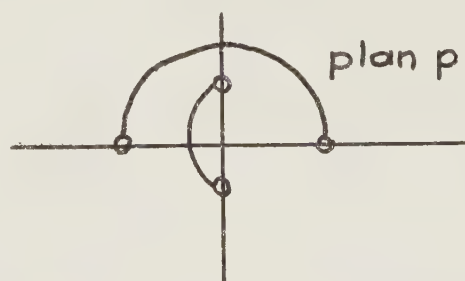


Fig 10 (b)

Cas où toutes les coupures ne peuvent pas être tracées dans R^-

4) On écrit alors que les racines rejetées $q_m(p)$ doivent annuler le numérateur $A(p, q)$. Ces racines ne seront pas des pôles de $F(p, q)$, et les conditions surabondantes se trouvent éliminées par les équations :

$$A[p, q_m(p)] = 0$$

On peut écrire A sous la forme suivante :

$$A(p, q) = A_1[p, q, q_m(p)] \prod_m [q - q_m(p)]$$

de sorte que les singularités $q_m(p)$ de $F(p, q)$ disparaissent :

$$F(p, q) = \frac{A(p, q)}{H(p, q)} = \frac{A_1[p, q, q_m]}{\prod_n [q - q_n]}$$

Notons encore que $F(p, q)$ est bien uniforme dans le plan p muni des coupures.

Si maintenant on donne à p une valeur purement imaginaire $p = i\omega_0$ (figure 11a) les racines $q_n(p)$ peuvent avoir différentes localisations dans le plan q (figure 11b). Elles peuvent être purement imaginaires, ou bien dans R^- , ou bien dans R^+ .

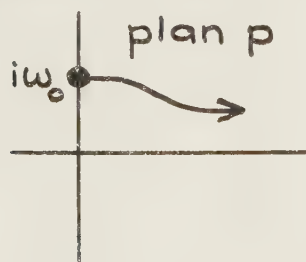


Fig 11 (a).

Trajet décrit par
 p partant de $p = i\omega_0$

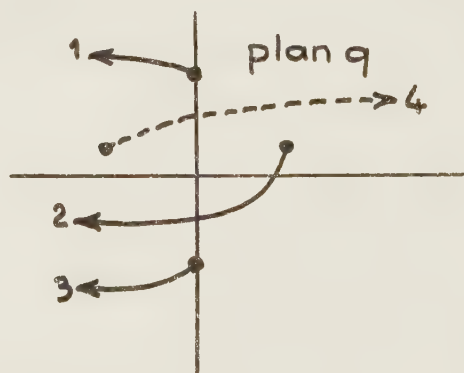


Fig 11 (b).

Trajets décrits par les racines $q(p)$
La racine 4 est rejetée. Pour $p = i\omega_0$, la
racine 2 est dans R^+ .

5) On pratique alors l'inversion^{de}/Mellin-Fourier dans le plan q , par intégration sur le contour de Bromwich B_1 , laissant à sa gauche les pôles q_n de F (figure 12a). On suppose que $F(p, q)$ est d'ordre $q^{-n} (n > 0)$ pour $q \rightarrow \infty$. On obtient :

$$F(p, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{B_1} F(p, q) \exp qx \, dq = \sum \text{Rés. aux pôles } q_n(p).$$

$$= \sum_n \frac{A(p, q_n)}{\partial H / \partial q(p, q_n)} \exp q_n x$$

où A contient le facteur $g(p) = (p - i\omega_0)^{-1}$ correspondant à la condition limite de fréquence ω_0 . On a :

$$F(p, x) = g(p) \sum_n b(p, q_n) \exp q_n x$$

où b ne présente pas de pôles dans le plan p à l'extérieur des coupures, puisque $\partial H / \partial q$ ne s'annule qu'aux points critiques de $q_n(p)$. Le seul pôle p de $F(p, x)$ est celui de $g(p)$, c'est-à-dire $p = i\omega_0$.

6) L'inversion de Mellin-Fourier dans le plan p est un peu plus délicate, à cause des coupures. On raccorde le contour de Bromwich B_2 aux coupures, traçant ainsi un parcours à gauche duquel $F(p, x)$ est holomorphe à l'exclusion du pôle $p = i\omega_0$ (figure 12b)

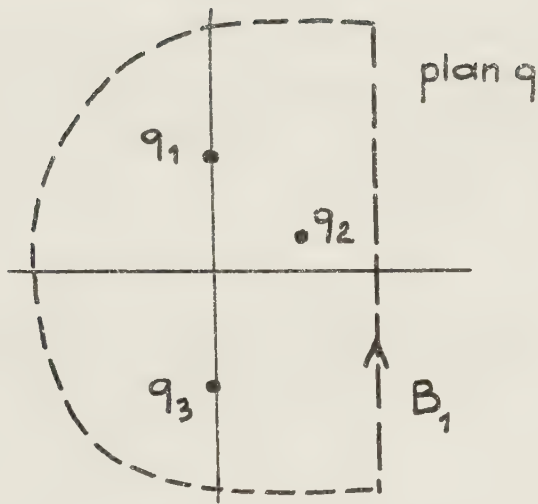


Fig 12 a.

Contour de Bromwich
dans le plan q .

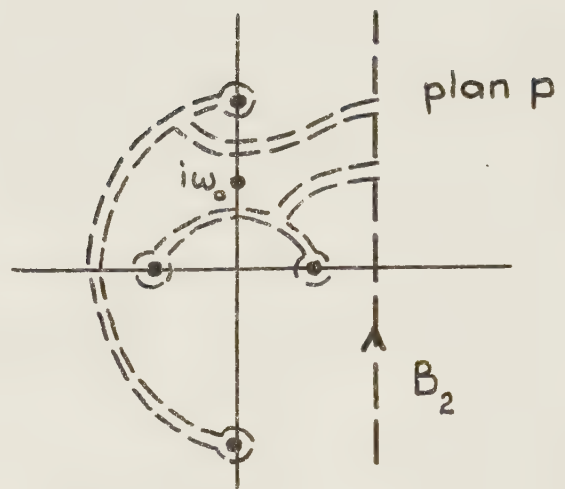


Fig 12 b.

Contour de Bromwich dans le plan p ,
raccordé aux coupures.

On a :

$$\begin{aligned}
 F(x,t) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{B_2} F(p,x) \exp pt \, dp \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{B_2} g(p) \exp pt \sum_n b(p,q_n) \exp q_n x \, dp
 \end{aligned}$$

Le contour B_2 sera refermé soit dans R^+ , soit dans R^- , suivant la valeur de x/t , comparée à la limite $-p/q_n(p)$ lorsque $p \rightarrow \infty$. Le front d'onde le plus rapide est caractérisé par une vitesse égale à la plus grande valeur de $-p/q_n(p)$ pour $p \rightarrow \infty$. En avant de ce front, $F(x,t)=0$ puisque B_2 doit alors être refermé dans R^+ . Le front d'onde le plus lent est caractérisé par une vitesse égale à la plus petite

valeur de $-p/q_n(p)$ pour $p \rightarrow \infty$. En arrière de ce front, $F(x,t)$ est donnée par :

$$F(x,t) = \sum_n b_n \exp(q_n x + i\omega_0 t) - J(x,t)$$

$$\text{où } b_n = b[i\omega_0, q_n(i\omega_0)]$$

Les q_n sont les valeurs prises lorsque $p = i\omega_0$, et $J(x,t)$ représente la contribution des coupures.

Telle est la solution du problème dans le cas général. L'allure de cette solution dépend de la localisation des q_n et du comportement de $J(x,t)$. Le chapitre suivant précise les différents cas à envisager.

C- Les différents cas à envisager.

On a vu que la solution du problème se présentait sous la forme générale :

$$F(x,t) = \sum_n b_n \exp(q_n x + i\omega_0 t) - J(x,t)$$

Le premier terme peut représenter un régime permanent de fréquence ω_0 , pouvant croître ou décroître dans l'espace suivant la localisation des q_n . Le second terme représente un régime non permanent, pouvant constituer ou bien un transitoire si $J(x,t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$, ou bien une instabilité non convective si $J(x,t) \rightarrow \infty$ pour $t \rightarrow \infty$. Deux points doivent donc être examinés pour connaître la forme de $F(x,t)$: la localisation des $q_n(p)$ lorsque $p = i\omega_0$, et le comportement de $J(x,t)$ pour $t \rightarrow \infty$.

1) Localisation des q_n : Rappelons que les q_n sont les racines de $H(p, q) = 0$ qui satisfont la condition $R(p) > p_0 \rightarrow R(q) < q_0$. Si parmi ces racines l'une au moins est dans R^+ quand $p = i\omega_0$, la partie permanente de la solution est croissante dans l'espace. Elle n'est pas croissante dans l'espace si aucun des q_n n'est dans R^+ ; elle est même décroissante si tous les q_n sont dans R^- .

2) Comportement de $J(x, t)$: $J(x, t)$ étant la contribution due à l'intégration sur les bords des coupures, sa forme dépend de la localisation des points critiques P . On rencontre les cas suivants :

- Aucun point critique P n'est dans R^+ ; on montre qu'alors $J(x, t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$ car $|\exp pt| \leq 1$ sur les coupures, de sorte que le produit $tJ(x, t)$ admet une limite supérieure indépendante de t ; dans ce cas, J représente un régime transitoire.*

- L'un au moins des points critiques P se trouve dans R^+ . Puisqu'en ce point certaines racines retenues q_n permutent avec des racines rejetées q_m , l'intégrand $g(p) \sum_n b(p, q_n) \exp(q_n x + pt)$ prend des valeurs différentes sur les deux bords de la coupure, et puisque $R(p) > 0$, cette contribution est une fonction croissante du temps. La contribution de la coupure est alors une fonction croissante du temps, et $J(x, t)$ représente une instabilité non convective.

3) Conclusion. Le tableau I résume les divers cas examinés plus haut.

* Nous excluons le cas très particulier où $q(p) \rightarrow \infty$ quand $p \rightarrow P$.

Tableau I. Critère de stabilité pour les ondes se propageant vers la droite.

		Localisation des racines q_n quand $p=i\omega_0$	
		Aucun q_n dans R^+	Certains q_n dans R^+
Localisation des points critiques P	Aucun P dans R^+	Milieu stable pas d'ondes croissantes	Instabilité convective ondes croissantes
	Certains P dans R^+	Instabilité non convective pas de régime permanent	

H- Milieu semi-indéfini dans $x \leq 0$.

L'étude ci-dessus ne permet pas de prévoir l'existence des instabilités convectives se propageant vers la gauche. Il est nécessaire de faire une étude identique pour un milieu semi-indéfini dans $x \leq 0$. Le calcul se conduit exactement comme dans le paragraphe précédent II G, mais la condition d'holomorphie (2) n'est plus la même. Les racines retenues sont cette fois les racines $q_m(p)$ telles que :

$$(3) \quad R(p) > p_0 \rightarrow R(q) > q_0$$

En notant que les ondes croissantes vers la gauche sont associées aux q_m dans R^- , on obtient le tableau II.

Tableau II - Critère de stabilité pour les ondes se propageant vers la gauche

		Localisation des racines q_m quand $p=i\omega_0$	
Localisation des points critiques P	Aucun P dans R^+	Aucun q_m dans R^- Milieu stable pas d'ondes croissantes	Certains q_m dans R^- Instabilité convective ondes croissantes
	Certains P dans R^+	Instabilité non convective pas de régime permanent	

III.- COMPORTEMENT D'UN MILIEU INDEFINI.

A) Idée physique de base

Le chapitre II donne le comportement d'un milieu semi-indéfini dans des conditions assez restrictives.

Cependant, on va voir que ce comportement reflète le caractère intrinsèque du milieu. En effet, si le milieu est stable, c'est-à-dire si toute perturbation de ce milieu s'évanouit dans le temps, alors une oscillation à sa frontière engendre une onde non croissante dans l'espace, ni dans $x > 0$, ni dans $x < 0$. Si une oscillation à sa frontière $x=0$ engendre une onde croissante dans l'espace $x > 0$ (le milieu étant semi-indéfini dans $x \geq 0$) alors ce milieu présente une instabilité convective se propageant vers la droite ; en d'autres termes, toute perturbation telle que perturbation

initiale, bruit thermique, etc ... évolue en croissant tout en se propageant vers la droite. Si une oscillation à la frontière $x=0$ engendre une onde croissante dans l'espace $x<0$ (le milieu étant semi-indéfini dans $x\leq 0$), alors ce milieu présente une instabilité convective se propageant vers la gauche. Si le milieu présente une instabilité non convective, c'est-à-dire si toute perturbation telle que perturbation initiale, bruit thermique, etc évolue en croissant indéfiniment dans le temps en chaque point, alors une excitation à la frontière va déclencher cette instabilité, qui va envahir progressivement tout le milieu, croissant indéfiniment en tout point, et empêchant l'établissement de tout régime permanent, aussi bien dans $x>0$ que dans $x<0$. Cette connexion entre le comportement d'un milieu excité à la frontière et celui du milieu excité par une source plongée à l'intérieur a déjà été implicitement considérée comme évidente par de nombreux auteurs et clairement précisée par Sturrock /1/

Ainsi, les résultats obtenus pour le modèle semi-indéfini peuvent être utilisés pour établir un critère général, donnant le caractère intrinsèque du milieu.

Ce critère établit une connexion entre la nature stable ou instable, convective ou non, d'une perturbation, ainsi que la forme, amplifiée ou amortie, des ondes engendrées, d'une part, et certaines propriétés topologiques de l'équation de dispersion d'autre part, relatives à la localisation des points critiques et au comportement des racines dans le plan complexe.

B) Forme générale du critère

Pour énoncer notre critère et pour le comparer plus

facilement à celui de Sturrock, il est pratique de revenir aux notations classiques ω et k en posant $p=i\omega$, $q=ik$. Ainsi, aux q dans R^+ (demi-plan de droite) correspondent les k dans Z^- (demi-plan inférieur); aux points critiques P dans R^+ correspondent les points critiques Ω dans Z^- ;

Soit un milieu dont les propriétés sont décrites par une équation de dispersion algébrique $D(\omega, k) = 0$ pour des ondes de la forme $\exp i(kx + \omega t)$. Soient $k_n(\omega)$ les racines satisfaisant la condition (2')

$$(2') \quad \text{Im } \omega < a \rightarrow \text{Im } k_n > b$$

et soient $k_m(\omega)$ les racines satisfaisant la condition (3')

$$(3') \quad \text{Im } \omega < c \rightarrow \text{Im } k_m < d$$

(où a, b, c, d , sont des nombres fixes). Alors, si Ω sont les points critiques de la fonction $k(\omega)$ autour desquels certains k_n permutent avec certains k_m :

1- Le milieu est stable et ne peut pas supporter d'ondes croissantes dans l'espace si simultanément aucun $k_n(\omega)$ n'est dans Z^- pour ω réel, aucun $k_m(\omega)$ n'est dans Z^+ pour ω réel, et aucun Ω n'est dans Z^- .

2- Le milieu présente des instabilités convectives et peut supporter des ondes croissantes dans l'espace si simultanément certains $k_n(\omega)$ sont dans Z^- pour ω réel, ou bien certains $k_m(\omega)$ sont dans Z^+ pour ω réel, et aucun Ω n'est dans Z^- .

3- Le milieu est le siège d'instabilités non convectives, et ne peut supporter aucun régime permanent, si certains points critiques Ω sont dans Z^- .

Le tableau III résume cette connexion entre le caractère du milieu et les propriétés topologiques de l'équation de dispersion.

Tableau III. Forme générale du critère de stabilité

Localisation des racines k_n et k_m pour ω réel					
		Aucun k_n dans Z^- Aucun k_m dans Z^+	Certains k_n dans Z^- Aucun k_m dans Z^+	Aucun k_n dans Z^- Certains k_m dans Z^+	Certains k_n dans Z^- Certains k_m dans Z^+
Localisation des points critiques Ω	Aucun Ω dans Z^-	Stabilité. Pas d'ondes crois- santes.	Instabilité con- vective se pro- pageant vers la droite. Ondes croissantes dans $x > 0$	Instabilité con- vective se pro- pageant vers la gauche. Ondes croissantes dans $x < 0$	Instabilités con- vectives allant dans les deux sens. Ondes croissantes dans $x < 0$ et $x > 0$
	Certains Ω dans Z^-	Instabilité non convective Pas de régime permanent			

c) Forme simplifiée - Connexion avec le critère de Sturrock

Lorsque l'équation de dispersion a tous ses coefficients réels, on peut tracer la courbe de dispersion $\omega(k)$ dans des coordonnées réelles et examiner l'influence des différentes paires de branches (figure 13, a, b, c).

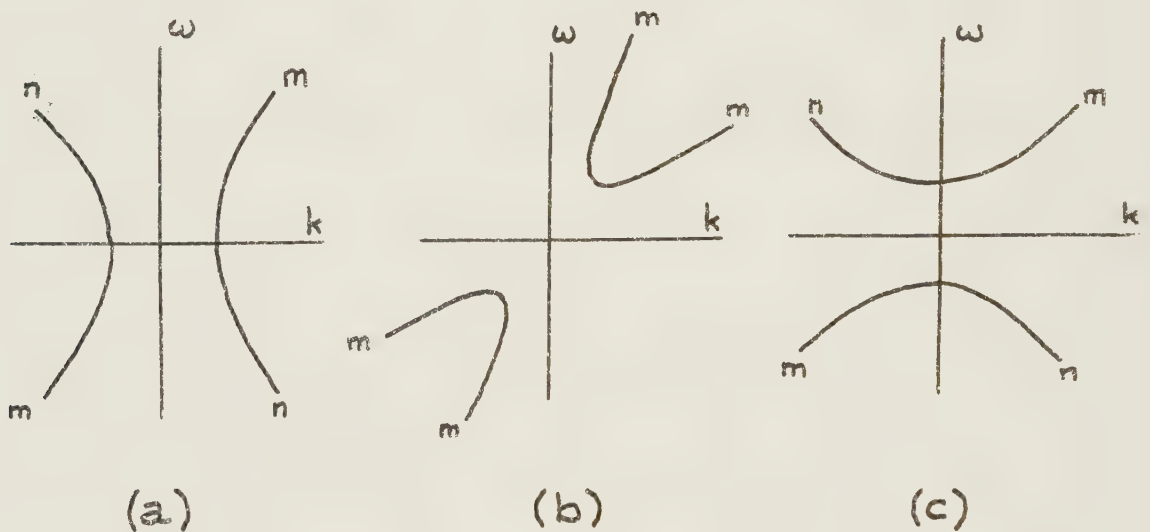


Fig 13. Différents types de branches de la courbe de dispersion.

1- Dans le cas de la figure 13, a, on peut montrer que les points critiques de $k(\omega)$ sont complexes. L'un d'eux est dans Z^- . Autour de ce point critique permutent deux racines de classes respectives n et m (pour $\omega \rightarrow \infty$, $k_n \rightarrow -\infty$ et $k_m \rightarrow +\infty$). On a donc une instabilité non convective.

2- Dans les deux autres cas 13 b et c, les points critiques Ω sont réels. On doit donc examiner le comportement des racines k_n et k_m . On note que les conditions du paragraphe III B, 2 :

$$(4) \quad k_n(\omega_0) \text{ dans } Z^-, \quad \text{Im}(\omega) < a \rightarrow \text{Im}(k_n) > b$$

$$(5) \quad k_m(\omega_0) \text{ dans } Z^+, \quad \text{Im}(\omega) < c \rightarrow \text{Im}(k_m) < d$$

peuvent s'exprimer d'une façon très simple ; en effet, la condition (4) signifie que la racine k_n (figure 14 a) initialement dans Z^- quand $\omega = \omega_0$ réel (figure 14 b) passe dans Z^+ lorsque ω décrit un trajet quelconque dans Z^- , partant de ω_0 , évitant la coupure et s'éloignant de l'axe ω réel. De la même façon, la condition (5) signifie que la racine k_m initialement dans Z^+ passe dans Z^- . En conséquence, les conditions (4) ou (5) entraînent que tous les trajets partant de ω_0 et s'éloignant dans Z^- doivent contenir un nombre impair de points ω (k réel). Il en résulte que la courbe ω (k réel) tracée dans le plan ω , passant par les points critiques Ω , doit joindre ces points critiques par une ligne continue (figure 14 b)

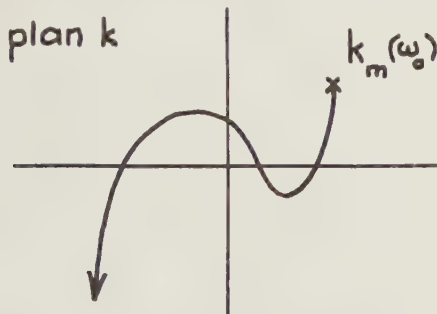


Fig 14 a .

Racine k_m initialement dans Z^+ pour $\omega = \omega_0$, passant dans Z^- .

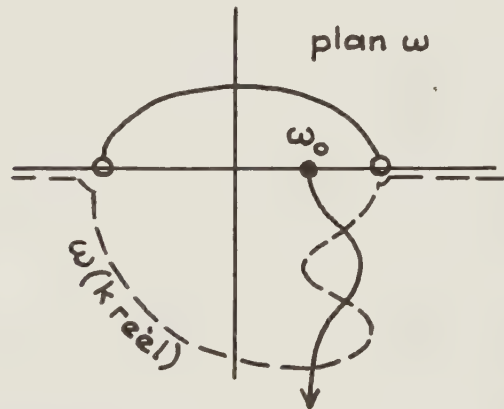


Fig 14 b .

Trajet décrit par ω partant de ω_0 et s'éloignant dans Z^- .

Or le lieu ω (k réel) ne joint les points critiques de façon continue que dans les cas du type 13 a ou 13 b. Par suite,

le cas 13 b correspond à l'existence d'une instabilité convective, et une onde croissante dans l'espace peut exister.

3- Le cas 13 c correspond à un milieu stable, puisque les points critiques sont réels, la racine k_n est dans Z^+ ou bien réelle et la racine k_m est dans Z^- ou bien réelle.

On retrouve ainsi intégralement le critère de Sturrock pour le cas d'une équation de dispersion à coefficients réels. Cependant, pour appliquer ce critère dans le cas général où plusieurs branches existent simultanément, il conviendrait de s'assurer qu'aucun point critique complexe n'échappe à l'analyse.

D) Connexion avec le critère de Bers et Briggs

Récemment, Bers et Briggs /4/ ont donné une autre méthode pour traiter le problème des instabilités et ondes croissantes dans l'espace, dans un milieu indéfini excité par une source bien localisée. Ils emploient la transformation Fourier-Laplace, et font appel au principe de causalité. Ce dernier se révèle équivalent à notre condition d'holomorphie. Si l'on note que leur contour F est une frontière entre les racines de classe n et les racines de classe m , et que leurs "vraies singularités" (correspondant au passage de deux racines k à travers le contour $\tilde{F}$) sont en fait nos points critiques Ω autour desquels certains k_n permutent avec certains k_m , on voit que le procédé énoncé par ces auteurs peut conduire au même critère que le nôtre.

E) Exemples d'applications : ondes électrostatiques

1) Plasma isotrope. L'équation de dispersion s'écrit :

$$1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2 - \alpha^2 k^2} = 0$$

où α est la vitesse thermique et ω_1 la fréquence plasma. L'examen des figures 15 a, b, c montre que ce milieu est stable. Une onde de fréquence $\omega_0 < \omega_1$ est évanescente.

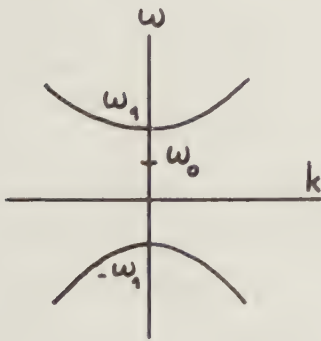


Fig 15 a.

Courbe de dispersion.

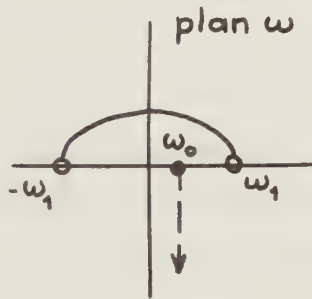


Fig 15 b.

Les deux points critiques $\pm\omega_1$ sont réels.

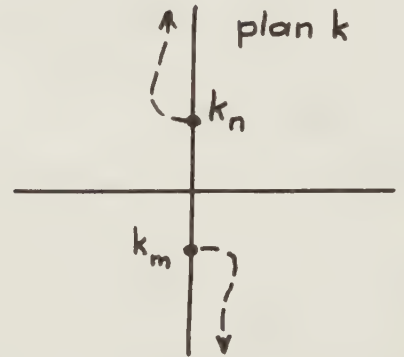


Fig 15 c.

Comportement des racines k_n et k_m .

2) Faisceau-plasma. L'équation de dispersion s'écrit :

$$1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2 - \alpha^2 k^2} - \frac{\omega_2^2}{(\omega + kV)^2} = 0$$

où ω_1 et ω_2 sont respectivement les fréquences plasma du plasma et du faisceau. Les figures 16, a, b, c montrent la courbe de dispersion, les quatre points critiques réels, et le comportement des racines $k(\omega)$. L'une des racines de classe n se trouve dans Z^- lorsque $\omega = \omega_0$. On a donc une instabilité convective se propageant vers la droite. Si le milieu, semi-

indéfini dans $x \gg 0$, est excité en $x=0$, l'onde engendrée est croissante dans l'espace.

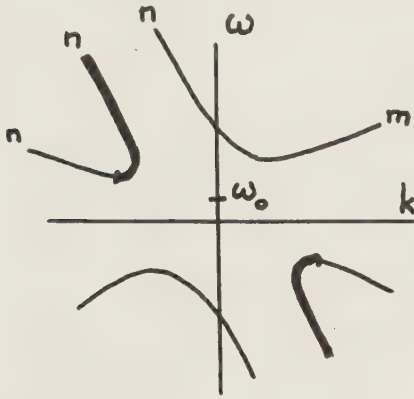


Fig 16 a.

Courbe de dispersion

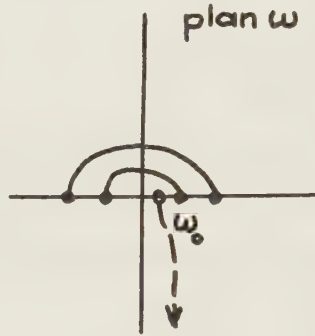


Fig 16 b.

Les quatre points critiques sont réels.

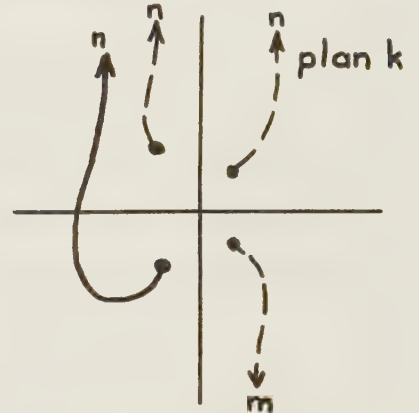


Fig 16 c.

Comportement des racines k_n et k_m .

3) Faisceaux croisés, sans collisions. L'équation de dispersion s'écrit :

$$1 - \frac{\omega_2^2}{(\omega + kV)^2} - \frac{\omega_1^2}{(\omega - kV)^2} = 0$$

où ω_2 est la fréquence plasma de chaque faisceau. Sous forme réduite, cette équation s'écrit :

$$1 - \frac{1}{(Y+X)^2} - \frac{1}{(Y-X)^2} = 0$$

où $X = kV/\omega_2$ et $Y = \omega/\omega_2$. Examinons les figures 17 a, b, c. Le point critique $Y = -i/2$, situé dans Z^- , est un point Ω , puisqu'il produit la permutation suivante :

$$1 \leftrightarrow 4, \quad 2 \leftrightarrow 3$$

les racines 1 et 3 étant de classe n et les racines 2 et 4 de classe m . On en conclut qu'il y a une instabilité non convective.

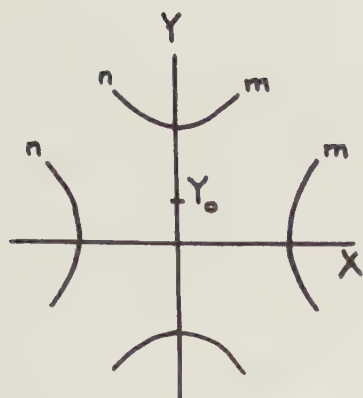


Fig 17 a.

Courbe de dispersion.

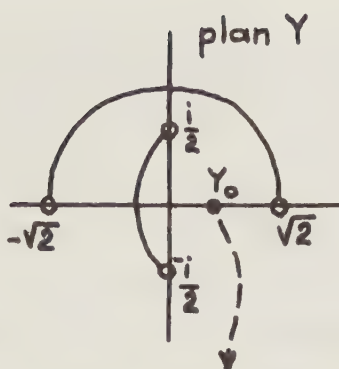


Fig 17 b.

parmi les 4 points critiques, l'un est dans Z^- .



Fig 17 c.

Comportement des racines k_n et k_m .

4) Faisceaux croisés, avec collisions. Cette fois, les coefficients de l'équation de dispersion sont complexes, et il n'est plus possible de tracer une courbe de dispersion dans des coordonnées réelles ; le critère de Sturrock serait ici d'une application délicate. L'équation de dispersion s'écrit

$$1 - 2\omega_2^2 \frac{\omega(\omega - i\nu) + k^2 V^2}{(\omega^2 - k^2 V^2)[(\omega - i\nu)^2 - k^2 V^2]} = 0$$

Il y a 6 points critiques pour la fonction $k(\omega)$:

$$\omega = 0$$

$$\omega = i\nu$$

$$\omega = i\frac{\nu}{2} \pm \sqrt{2\omega_2^2 - \frac{\nu^2}{4}}$$

$$\omega = i\frac{\nu}{2} \pm \frac{i}{2} \frac{\omega_2^2}{\sqrt{\omega_2^2 - \frac{\nu^2}{4}}}$$

Les figures 18a et 18b représentent la localisation de ces points critiques, lorsque $\nu < 2\omega_2$ et $\nu > 2\omega_2$. La figure 18c montre le comportement des racines k . On voit que lorsque $\nu < 2\omega_2$, l'un des points critiques est dans Z^- . En ce point, les racines 1 et 3, de classe n , permutent avec les racines 4 et 2, de classe m . On a donc une instabilité non convective. Si par contre $\nu > 2\omega_2$, il n'y a aucun point critique dans Z^- ; puisque les racines k_n sont dans Z^+ et les racines k_m dans Z^- , le milieu est stable et les ondes sont décroissantes dans l'espace.

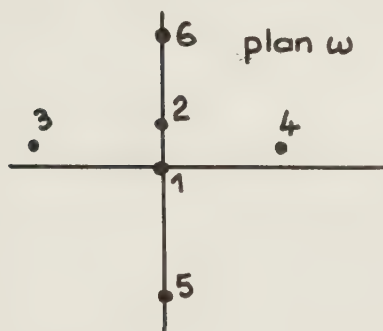


Fig 18a.

Localisation des points critiques pour $\nu < 2\omega_2$.

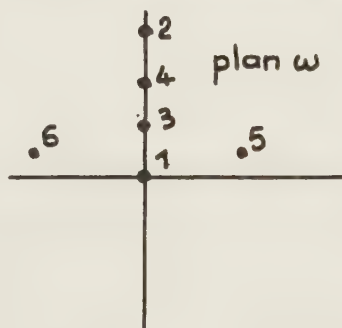


Fig 18b.

Localisation des points critiques pour $\nu > 2\omega_2$.

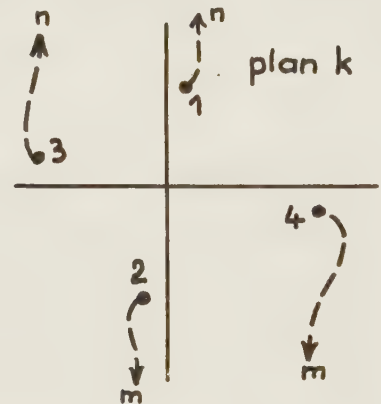


Fig 18c.

Comportement des racines k_n et k_m .

IV.- CONCLUSION.

Il est encourageant de constater que des résultats identiques sont obtenus par plusieurs méthodes indépendantes. Aucune d'elles n'est à l'abri de toute critique, mais puisqu'elles sont basées sur des modèles assez différents (perturbation initiale dans un milieu indéfini, conditions aux limites dans un milieu semi-indéfini, source localisée dans un milieu indéfini) on peut en conclure que les idées de Sturrock sont bien confirmées.

Notre critère est assez général pour être appliqué à n'importe quel milieu caractérisé par une équation de dispersion analytique* $D(\omega, k)=0$. Notons cependant que l'étude du comportement des racines et de leurs permutations peut exiger des calculs numériques assez laborieux lorsque le degré de l'équation de dispersion est supérieur à quatre, ou lorsque cette équation n'est pas algébrique.

* à l'exclusion de cas très singuliers comme $k(\Omega) \rightarrow \infty$.

- R E F E R E N C E S -

=====

- /1/ P.A. STURROCK, Phys. Rev. 112, 1488 (1958)
- /2/ J.D. JACKSON, J. Nucl. Energy , Pt, C1, 171 (1960)
- /3/ R.V. POLOVIN, Zh. Tekhn. Fiz. 31, 1220 (1961) (Trad. anglaise Soviet Phys. Techn. Phys. 6, 889 (1962)
- /4/ A. BERS and R.J. BRIGGS, MIT Research Laboratory of Electronics Report N° 71, 1963 p. 122 (non publié)
- /5/ P. ROLLAND, Phys. Rev. 140, 776 (1965)

- DEUXIEME PARTIE -

PUISSANCE ABSORBÉE - OU ENGENDRÉE - PAR LES DIFFÉRENTS MODES EXCITÉS DANS UN PLASMA

PLAN

- 1 - Introduction.
- 2 - Puissance absorbée dans un milieu stable. Nécessité d'une généralisation.
- 3 - Nouvelle expression du champ et classification des racines $k(\omega)$.
- 4 - Expression du champ HF pour un courant de source sinusoïdal dans le temps.
- 5 - Puissance consommée par le milieu.
- 6 - Connexion avec le critère de Sturrock.
- 7 - Connexion avec l'amortissement de Landau.
- 8 - Cas d'une source bien localisée dans l'espace. Ondes électrostatiques.
Applications : plasma isotrope, faisceau.
- 9 - Cas d'une source bien localisée dans l'espace. Ondes électromagnétiques.
Cas du plasma froid, limite $v=0$, application à l'onde EM polarisée.
- 10 - Cas d'une source bien répartie dans l'espace. Cas du plasma froid, ondes EM.

Annexes :

- 1 - Symétries de l'équation de dispersion et comportement des racines.
- 2 - Sur la décomposition de $E(k)$ en la somme de deux fonctions holomorphes.
- 3 - Bilan d'énergie.
- 4 - Source bien localisée, ondes ES (détail des calculs).
- 5 - " " " " EM (" ").
- 6 - Source bien répartie (détail des calculs).
- 7 - Choix des coordonnées dans l'espace $(\vec{k})$

Chap.1 - Introduction -

Lorsqu'un plasma contenant plusieurs composantes (ions, électrons, faisceaux...) est soumis à une excitation sinusoïdale dans le temps, due à une source plongée dans le plasma, on sait que plusieurs types d'ondes peuvent être engendrés : ondes non amorties, évanescentes ou croissantes dans l'espace. Un régime permanent d'oscillations est atteint si le milieu ne présente pas d'instabilités non convectives. Les critères cinématiques développés jusqu'ici [1, 2] ne disent rien sur le sens des échanges d'énergie entre les différentes composantes du milieu et pour les différents modes excités. Il nous a semblé intéressant de compléter cette description cinématique par une étude de l'énergie délivrée par la source et absorbée par le plasma, ou inversement générée par le plasma et recueillie par la source. L'intérêt théorique de cette étude est d'établir la jonction entre les critères cinématiques et les critères énergétiques. L'intérêt pratique en est de donner des formules simples directement utilisables pour l'expérimentateur. Par ailleurs, ce travail met en évidence le rôle capital de la "dispersion spatiale" génératrice d'absorption - ou de génération - d'énergie même en l'absence de collisions.

On établit d'abord (chap. 2) une formule donnant la puissance totale consommée dans un milieu stable et l'on montre que cette formule ne peut pas être appliquée aux milieux présentant des instabilités convectives, associées à des ondes croissantes dans l'espace. On cherche alors (chap. 3) une définition plus générale du champ, généralisant la transformation de Fourier et permettant de traiter les ondes croissantes. Faisant usage du principe de causalité, on est conduit comme dans [2] à classer les racines de l'équation de dispersion en deux classes n et m . La nouvelle expression du champ permet de calculer (chap. 5) la puissance échangée, même en présence d'ondes croissantes. Ce résultat permet d'établir une connexion

avec le critère de Sturrock (chap. 6), tout en précisant quel type de mode est responsable de la relaxation. Par ailleurs, il apparaît (chap. 7) que la dispersion spatiale joue un rôle identique à l'amortissement de Landau pour les grandes ondes. Pour tirer parti plus complètement des résultats généraux, tout en les illustrant, on a développé le calcul du champ, du courant et de la puissance échangée dans deux cas : celui (chap. 8,9) d'une source bien localisée dans l'espace $J = J_0 \sin \omega t$ ($-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$) et celui (chap. 10) d'une source bien répartie dans l'espace $J = J_0 e^{-\alpha|x|}$. Cette particularisation permet d'aller plus loin dans la connexion avec le critère de Sturrock. Elle montre que dans la limite non collisionnelle, les modes k réel appartenant à une branche "stable" absorbent de l'énergie, alors qu'il n'y a aucun échange avec les modes complexes évanescents ; sur une branche "instable", l'un des modes k réel consomme de l'énergie, alors que l'autre en produit et les deux modes complexes instables produisent de l'énergie. Dans l'interaction faisceau-plasma, on trouve que seule l'onde lente du faisceau est responsable de la relaxation, comme beaucoup d'auteurs le présumaient. On donne plusieurs exemples simples : ondes ES dans un plasma isotrope chaud, dans un faisceau monocinétique d'électrons, ondes EM dans un plasma froid.

Chap. 2 - Puissance absorbée dans un milieu stable dissipatif.

Nécessité d'une généralisation -

On écrit la densité de puissance absorbée par le milieu* sous la forme :

$$(1) \quad P_\omega(r) = \vec{E}_\omega \cdot \vec{J}_\omega^* + \vec{E}_\omega^* \cdot \vec{J}_\omega$$

où $\vec{J}_\omega$ caractérise le courant propre du milieu $\vec{J}_\omega e^{i\omega t} + \vec{J}_\omega^* e^{-i\omega t}$

* Localement, la puissance absorbée par le milieu est en partie dissipée, en partie transmise [4] (annexe 3). Seule la puissance totale absorbée nous intéressera dans la suite.

et où $\vec{E}_\omega$ caractérise le champ total au sein du milieu $\vec{E}_\omega e^{i\omega t} + \vec{E}_\omega^* e^{-i\omega t}$.

On sait [3] que $\vec{J}_\omega$ est lié à $\vec{E}_\omega$ par la relation :

$$\vec{J}_\omega(r) = \int_{r'} \vec{K}_\omega(r, r') \cdot \vec{E}_\omega(r') d\underline{r'} \quad \text{où } \vec{K} \text{ est le noyau de conductivité}$$

de sorte que la densité de puissance absorbée s'écrit :

$$P_\omega(r) = \vec{E}_\omega(r) \cdot \int_{r'} \vec{K}_\omega^*(r, r') \cdot \vec{E}_\omega^*(r') d\underline{r'} + \vec{E}_\omega^*(r) \cdot \int_{r'} \vec{K}_\omega(r, r') \cdot \vec{E}_\omega(r') d\underline{r'}$$

La puissance totale dissipée dans tout le milieu s'écrit ici :

$$P_\omega = \int_r d\underline{r} P_\omega(r) \quad \text{soit :}$$

$$P_\omega = \iint d\underline{r} d\underline{r'} \vec{E}_\omega(r) \cdot \vec{K}_\omega^*(r, r') \cdot \vec{E}_\omega^*(r') + \iint d\underline{r} d\underline{r'} \vec{E}_\omega^*(r) \cdot \vec{K}_\omega(r, r') \cdot \vec{E}_\omega(r')$$

On transforme la première intégrale en permutant $\vec{E}_\omega(r)$ et $\vec{E}_\omega^*(r')$ ce qui oblige à transposer $\vec{K}_\omega^*$, puis en changeant l'ordre d'intégration:

$$\vec{E}_\omega(r) \cdot \vec{K}_\omega^*(r, r') \cdot \vec{E}_\omega^*(r') = \vec{E}_\omega^*(r') \cdot \vec{K}_\omega^{\dagger}(r, r') \cdot \vec{E}_\omega(r) \rightarrow \vec{E}_\omega^*(r') \cdot \vec{K}_\omega^{\dagger}(r', r) \cdot \vec{E}_\omega(r) \quad \text{d'où :}$$

$$(3) \quad P_\omega = \iint d\underline{r} d\underline{r'} \vec{E}_\omega^*(r') \cdot \{ \vec{K}_\omega(r, r') + \vec{K}_\omega^{\dagger}(r', r) \} \cdot \vec{E}_\omega(r)$$

Si le milieu est homogène, $\vec{K}_\omega$ est une fonction de $|\underline{r} - \underline{r}'|$ seulement

Dans un milieu stable dissipatif, le champ est décroissant à l'infini pour toute fréquence ω . Il admet donc une transformée de Fourier dans l'espace. Ceci permet de transformer la formule (3) en appliquant le théorème de convolution :

$$\int d\underline{r'} \vec{K}_\omega(r - r') \cdot \vec{E}_\omega(r') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\underline{k} \vec{K}_\omega(\underline{k}) \cdot \vec{E}_\omega(\underline{k}) e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} \quad \text{et :}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\underline{r} \vec{E}_\omega^*(\underline{r}) \int d\underline{k} \vec{K}_\omega(\underline{k}) \cdot \vec{E}_\omega(\underline{k}) e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\underline{k} \vec{E}_\omega^*(\underline{k}) \cdot \vec{K}_\omega(\underline{k}) \cdot \vec{E}_\omega(\underline{k}) \quad \text{d'où :}$$

$$(4) \quad P_{\omega} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \, \vec{E}_{\omega}^*(\mathbf{k}) \cdot \left\{ \vec{K}_{\omega}(\mathbf{k}) + \vec{K}_{\omega}^{\dagger}(\mathbf{k}) \right\} \cdot \vec{E}_{\omega}(\mathbf{k})$$

Soit $\vec{J}_s(\mathbf{k})$ la composante de Fourier du courant source $\vec{J}_s(\mathbf{r})e^{i\omega t}$.

La réduction des équations de Maxwell avec source :

$$\begin{cases} i\mathbf{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \\ i\mathbf{k} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} [i\omega \vec{E} + 4\pi(\vec{J} + \vec{J}_s)] \end{cases}$$

où $\vec{J} = \vec{K} \cdot \vec{E}$, montre que :

$$\vec{D} \cdot \vec{E}(\mathbf{k}) = \frac{4i\pi}{\omega} \vec{J}_s(\mathbf{k}) \quad \text{où } \vec{D} \text{ est le noyau de dispersion :}$$

$$(5) \quad \vec{D} = \vec{1} - \frac{c^2}{\omega^2} \vec{H} + \frac{4\pi}{i\omega} \vec{K}(\omega, \mathbf{k}) \quad \text{avec } \vec{H} = k^2 \delta_{ij} - k_i k_j$$

La forme de $\vec{D}$ dépend essentiellement du choix des coordonnées

On se limitera ici à l'étude du cas où il existe une représentation dans laquelle $\vec{E}$ et $\vec{J}_s$, sont colinéaires* dans l'espace $\mathbf{k}$. Le caractère tensoriel du noyau de dispersion disparaît et :

$$D \vec{E}_{\omega}(\mathbf{k}) = \frac{4i\pi}{\omega} \vec{J}_s(\mathbf{k}) = \vec{\Psi}_{\omega}(\mathbf{k})$$

Par exemple, pour les ondes électrostatiques, on choisit k_x parallèlement à $\vec{E}$ et $D = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega^2 k_x^2}$. Pour les ondes EM polarisées, on adopte les coordonnées tournantes, avec k_x normal au champ, ce qui donne $D = 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \Omega)}$

Moyennant cette représentation on a $\vec{E}_{\omega}(\mathbf{k}) = \frac{4i\pi}{\omega} \frac{\vec{J}_s(\mathbf{k})}{D(\omega, \mathbf{k})} = \frac{\vec{\Psi}_{\omega}(\mathbf{k})}{D(\omega, \mathbf{k})}$ et

$$P_{\omega} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{\Psi \Psi^* [K + K^*]}{D D^*}$$

*

On peut souvent se ramener à ce cas en décomposant $\vec{\Psi}$ suivant les directions propres de la matrice D_{ij} (annexe 7).

Si le problème est unidimensionnel $\Psi = \Psi(k_x) \delta(k_y) \delta(k_z)$,
et la puissance totale consommée par le milieu s'écrit :

$$(6) \quad P_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\Psi \Psi^* [K + K^*]}{D D^*} = \frac{\omega}{4\pi^2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\Psi \Psi^*}{D} \quad \left(\Psi = \frac{4i\pi}{\omega} J \right)$$

(on note que $K + K^* = \frac{i\omega}{4\pi} (D - D^*)$ puisque ω et k sont réels).

L'intégrant de (6) est bien défini en tout point de l'axe ^k réel, sur lequel on intègre. Cette formule (6) est valable pour les ondes électrostatiques (annexes 4, 5) ou électromagnétiques et peut être utilisée aussi bien dans la théorie macroscopique (avec collisions) que dans la théorie microscopique.

Domaine de validité de la formule (6) : La démonstration de la formule (6) repose sur le fait que le champ admet une double transformée de Fourier dans le temps et l'espace. Ceci est vrai lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dt |E(x, t)|^2$ converge, c'est-à-dire lorsque le paquet d'ondes est décroissant dans le temps et l'espace, comme c'est le cas dans un milieu stable. Mais s'il existe une instabilité convective, cette intégrale double ne converge pas puisque le paquet d'ondes croît en se déplaçant. Dans ce cas, on doit chercher un autre mode de définition du champ et une autre méthode de calcul de la puissance échangée, capable de généraliser la formule (6).

Chap. 3 - Nouvelle expression du champ et classification des racines $k(\omega)$ - Cas unidimensionnel -

La double transformation de Laplace nous a déjà conduit à distinguer deux classes de racines [2], ceci en imposant une condition d'holomorphie à la transformée. Nous allons retrouver ici la même

classification en faisant usage du principe de causalité.

Définissons la transformation suivante pour toutes les grandeurs :

$$(7) \quad E(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\delta} \int_{\Gamma} d\omega dk e^{ikx+i\omega t} E(\omega,k)$$

où les parcours δ et Γ restent à préciser. Cette transformation est plus générale que la transformation de Fourier et permet de traiter les ondes croissantes. Si $\mathcal{J}(\omega,k)$ est la transformée du courant de source, la transformée du champ total est donnée par :

$$(8) \quad \mathcal{D}(\omega,k) E(\omega,k) = \frac{4i\pi}{\omega} \mathcal{J}(\omega,k)$$

où $\mathcal{D}$ est le noyau de dispersion, supposé exempt de coupures et de points singuliers essentiels. $\mathcal{D}(\omega,k)$ présente des zéros (simples si ω n'est pas un point critique) que l'on classera de la façon suivante :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_n(\omega) \text{ tels que } \text{Im}(k_n) \rightarrow +\infty \text{ quand } \text{Im}(\omega) \rightarrow -\infty \\ k_m(\omega) \text{ tels que } \text{Im}(k_m) \rightarrow -\infty \text{ quand } \text{Im}(\omega) \rightarrow -\infty \end{array} \right.$$

On décompose le champ $E(x,t)$ en la somme $E_1(x,t) + E_2(x,t)$

$$\begin{array}{ll} \text{où } E_1 = E \text{ pour } x > x_0 & E_2 = E \text{ pour } x < x_0 \quad (x_0 \text{ arbitraire}) \\ & = 0 \text{ pour } x < x_0 & = 0 \text{ pour } x > x_0 \end{array}$$

Si la source est allumée en $t = t_0$, le principe de causalité impose :

$$E = 0 \text{ pour } t < t_0$$

On ne perd aucune généralité en faisant $x_0 = 0$ et $t_0 = 0$ (choix des origines).

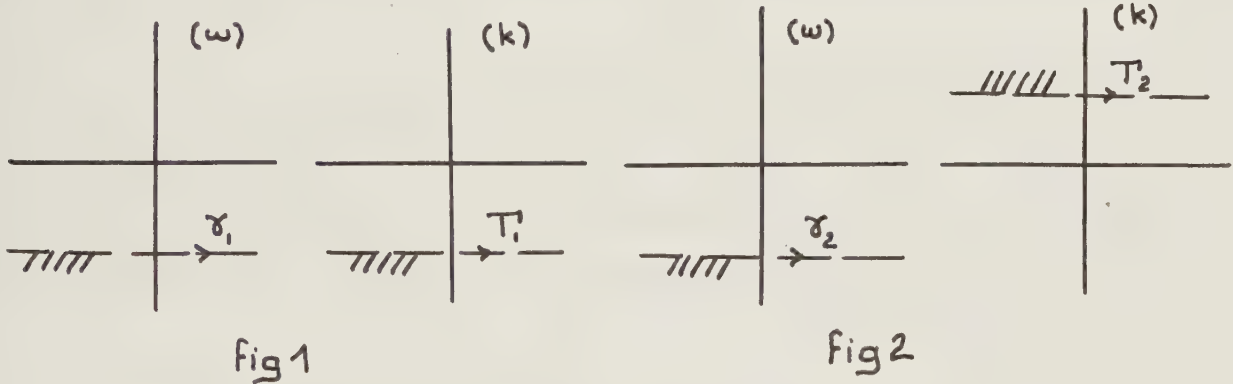
Les doubles transformées de Laplace de E_1 et E_2 sont définies par :

$$E_1(\omega, k) = \int_0^\infty \int_0^\infty dx dt e^{-ikx - i\omega t} E_1(x, t) ; E_2(\omega, k) = \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty dx dt e^{-ikx - i\omega t} E_2(x, t)$$

De sorte que E_1 et E_2 sont donnés par les formules d'inversion :

$$E_1(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\gamma_1} \int_{T_1} d\omega dk e^{ikx + i\omega t} E_1(\omega, k) ; E_2(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\gamma_2} \int_{T_2} d\omega dk e^{ikx + i\omega t} E_2(\omega, k)$$

Les fonctions $E_1(\omega, k)$ et $E_2(\omega, k)$ sont respectivement holomorphes dans les $\frac{1}{2}$ plans associés $\text{Im}(\omega) < \gamma_1$; $\text{Im}(k) < T_1$ et $\text{Im}(\omega) < \gamma_2$; $\text{Im}(k) > T_2$. (fig: 1 et 2)



On décompose de la même façon le courant de source $\mathcal{J}_s$, en notant que puisque $\mathcal{J}_s$ est décroissant à l'infini dans l'espace et le temps (la source est allumée, puis éteinte), $\mathcal{J}_1(\omega, k)$ et $\mathcal{J}_2(\omega, k)$ sont respectivement holomorphes dans :

$$\text{Im}(\omega) \leq 0, \text{Im}(k) \leq 0 \quad \text{et} \quad \text{Im}(\omega) \leq 0, \text{Im}(k) \geq 0$$

De sorte que :

$$\mathcal{J}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\gamma} \int_{T_{\text{réel}}} d\omega dk e^{ikx + i\omega t} \mathcal{J}(\omega, k)$$

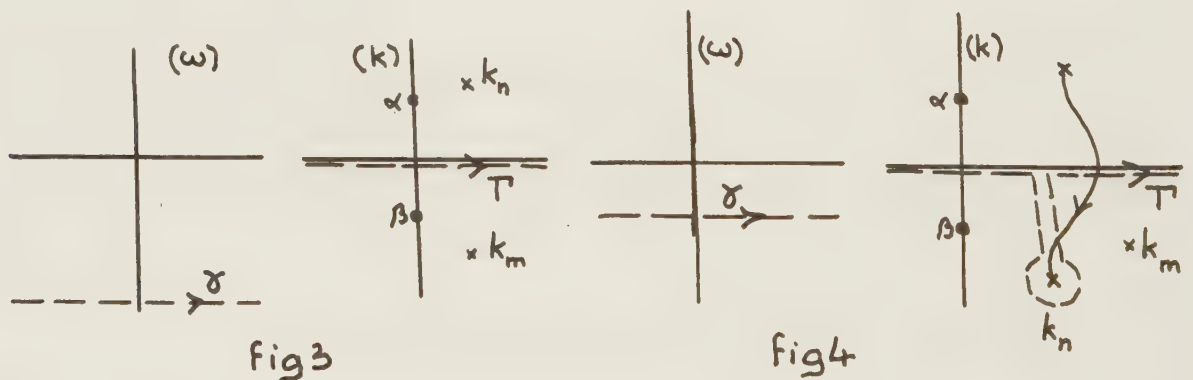
Si l'on choisit $\gamma_1 \equiv \gamma_2 \equiv \gamma$ suffisamment bas dans le plan (ω) (fig3), les parcours Γ_1 et Γ_2 peuvent être choisis sur l'axe k réel. En effet, on a alors* :

$$E(\omega, k) = E_1(\omega, k) + E_2(\omega, k) = \frac{4i\pi}{\omega D(\omega, k)} [\mathcal{J}_1(\omega, k) + \mathcal{J}_2(\omega, k)]$$

E_1 présente les singularités ^{α} de $\mathcal{J}_1$ plus les singularités $k_n(\omega)$ telles que $\text{Im}(k_n) \rightarrow +\infty$ quand $\text{Im}(\omega) \rightarrow -\infty$. E_2 présente les singularités ^{β} de $\mathcal{J}_2$ plus les singularités $k_m(\omega)$ telles que $\text{Im}(k_m) \rightarrow -\infty$ quand $\text{Im}(\omega) \rightarrow -\infty$ (Annexe 2). On peut alors écrire :

$$E(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\gamma} \int_{\Gamma_{\text{réel}}} d\omega dk e^{ikx + i\omega t} E(\omega, k)$$

Si l'on ramène le parcours γ à distance finie, les singularités mobiles k_n et k_m se meuvent dans le plan (k) et peuvent même franchir l'axe k réel. Il faut alors modifier continuellement le parcours Γ de telle sorte qu'il passe toujours au-dessous des racines k_n et au-dessus des racines k_m . (fig4)



* Le milieu est au repos pour $t < 0$

En conclusion, le champ s'obtient à partir des formules (7) et (8) à condition que les parcours γ et Γ soient définis de la façon suivante :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma \text{ passe au-dessous de tous les points critiques } \Omega \text{ faisant permuer} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{k_n \leftrightarrow k_m} \\ \Gamma \text{ suit l'axe } k \text{ réel en faisant éventuellement des lacets de façon à passer} \\ \text{au-dessous des racines } k_n \text{ et au-dessus des racines } k_m \end{array} \right.$$

Si le milieu est stable et dissipatif, tous les k_n sont dans $Z^+(\text{Im}k) > 0$ et tous les k_m dans Z^- , tous les points critiques Ω sont dans Z^+ . Les parcours γ et Γ se réduisent alors aux axes réels ω et k , et (7) devient une double transformation de Fourier.

Chap. 4 - Expression du champ pour un courant de source sinusoïdal dans le temps -

Donnons nous un courant de source sinusoïdal dans le temps, mais arbitraire dans l'espace :

$$\begin{aligned} J(x,t) &= J_0(x) \sin \omega_0 t \quad \text{pour } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}, = 0 \text{ ailleurs.} \\ &= J_{\omega_0}(x) e^{i\omega_0 t} + J_{\omega_0}^*(x) e^{-i\omega_0 t} \quad \text{où } J_{\omega_0}(x) = \frac{1}{2i} J_0(x) \end{aligned}$$

La transformée de ce courant est :

$$J(\omega, k) = i J_0(k) \left\{ \frac{\sin(\omega + \omega_0) \frac{T}{2}}{(\omega + \omega_0)} - \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{T}{2}}{(\omega - \omega_0)} \right\}$$

Le champ est alors donné par :

$$E(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{\gamma \quad \Gamma} d\omega dk e^{i(kx + \omega t)} \frac{4i\pi}{\omega D(\omega, k)} i J_0(k) \left\{ \frac{\sin(\omega + \omega_0) \frac{T}{2}}{(\omega + \omega_0)} - \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{T}{2}}{(\omega - \omega_0)} \right\}$$

On se place pendant le fonctionnement de la source, après que les fronts d'ondes soient passés (par exemple, x fini, $T \rightarrow \infty$), c'est-à-dire :

$$-\frac{T}{2} < t - \frac{x}{V_p} < \frac{T}{2} \quad \text{où} \quad V_p = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega}{k_p(\omega)}$$

L'intégrale $I(\omega, x) = \int_{\Gamma} dk e^{ikx} \frac{J_0(k)}{D(\omega, k)}$ varie comme $\sum_p e^{ik_p(\omega)x}$ lorsque $\omega \rightarrow \infty$

On décompose les sin en exponentielles. Les contributions non nulles dans l'intégrale $E(x, t)$ sont :

$$E(x, t) = \frac{-i}{2\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} d\omega dk e^{i(kx + \omega t)} \frac{J_0(k)}{\omega D(\omega, k)} \left\{ \frac{e^{i(\omega - \omega_0)\frac{T}{2}}}{(\omega - \omega_0)} - \frac{e^{i(\omega + \omega_0)\frac{T}{2}}}{(\omega + \omega_0)} \right\}$$

L'intégration sur Γ est effectuée d'abord et donne une fonction $I(\omega, x)$ holomorphe dans le plan (ω) muni des coupures*. Les singularités dans le plan (ω) sont les pôles $\omega = 0, \omega = \pm \omega_0$, ainsi que les coupures joignant les points critiques Ω des racines $k(\omega)$ de $D = 0$. Sans expliciter l'intégrale sur k , il vient :

$$E(x, t) = \int_{\Gamma} dk e^{ikx + i\omega_0 t} \frac{J_0(k)}{\omega_0 D(\omega_0, k)} + \int_{\Gamma} dk e^{ikx - i\omega_0 t} \frac{J_0(k)}{\omega_0 D(-\omega_0, k)} - \int_{\Gamma} dk e^{ikx} \frac{J_0(k)}{\omega_0 D(0, k)} \left(e^{i\omega_0 \frac{T}{2}} + e^{-i\omega_0 \frac{T}{2}} \right) + \text{contribution des coupures}.$$

On suppose que le milieu ne présente pas d'instabilités non convectives, sinon il n'y aurait pas de régime permanent et le problème étudié ici n'aurait pas de sens. Les points critiques Ω sont alors dans Z^+ et la contribution des coupures représente le transitoire [2]. Le dernier terme, contribution du pôle $\omega = 0$, représente la composante continue du champ qui traduit l'effet d'écran (ce terme n'existe que pour les ondes ES)**. Les deux premiers termes représentent le champ HF qui se trouve de la forme :

$$E(x, t) = E_{\omega}(x) e^{i\omega t} + E_{\omega}^*(x) e^{-i\omega t} \quad \text{avec}$$

$$(11) \quad E_{\omega}(x) = \frac{2i}{\omega} \int_{\Gamma} \frac{J(k) e^{ikx}}{D(\omega, k)} dk$$

* Ces coupures ont pour but d'éviter les permutations $k_n \leftrightarrow k_m$ qui compromettraient la définition du parcours Γ (v. Annexe 4).

** Pour les ondes EM, on a $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega D(\omega, k)} \rightarrow 0$ (v. Annexe 5)

$\mathcal{J}(k)$ étant la transformée de $\mathcal{J}_\omega(x)$ définie par :

$$\mathcal{J}(x,t) = \mathcal{J}_\omega(x) e^{i\omega t} + \mathcal{J}_\omega^*(x) e^{-i\omega t}$$

(on trouvera un calcul plus explicite du champ dans le chapitre 8).

Chap. 5 - Expression générale de la puissance délivrée par la source et consommée* par le milieu -

On a vu que si le courant de source est de la forme $\mathcal{J}(x)e^{i\omega t} + \mathcal{J}^*(x)e^{-i\omega t}$, le champ HF est de la forme $E(x)e^{i\omega t} + E^*(x)e^{-i\omega t}$, avec (11) :

$$E(x) = \frac{2i}{\omega_0} \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{J}(k) e^{ikx}}{D(\omega_0 k)} dk \quad \text{où :}$$

$$\mathcal{J}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \mathcal{J}(x)$$

La densité de puissance consommée par la source s'écrit :

$$p_s(x) = 2 \operatorname{Re} E \mathcal{J}^* = -\frac{4}{\omega} \operatorname{Im} \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{J}(k) e^{ikx}}{D} dk \mathcal{J}^*(x)$$

La puissance totale consommée par la source s'écrit :

$$P_s = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = -\frac{4}{\omega} \operatorname{Im} \int_{\Gamma} dk \frac{\mathcal{J}(k)}{D} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \mathcal{J}^*(x)$$

On note que $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \mathcal{J}^*(x) = \mathcal{J}^*(k)$ définie sur k réel. D'où :

$$(12) \quad P_s = -\frac{4}{\omega} \operatorname{Im} \int_{\Gamma} dk \frac{\mathcal{J}(k) \mathcal{J}^*(k)}{D} = -\frac{\omega}{4\pi^2} \operatorname{Im} \int_{\Gamma} dk \frac{\Psi \Psi^*}{D} \quad \text{où } \Psi = \frac{4i\pi \mathcal{J}}{\omega}$$

Remarque : Dans la formule (12) comme dans les suivantes, le signe * signifie : changer i en $-i$ dans l'expression de $\mathcal{J}(k)$, ou de $\Psi(k)$, sans toucher à k .

c'est-à-dire absorbée.

D'après le principe de conservation de l'énergie et comme on le montre dans l'annexe (3), la puissance délivrée par la source est égale à la puissance consommée par le milieu dans les cas suivants :

- ondes électrostatiques croissantes ou décroissantes : milieu fini ou infini,
- ondes électromagnétiques décroissantes : milieu infini, ou bien milieu fini, mais sans pertes vers l'extérieur,
- ondes électromagnétiques croissantes : milieu fini, sans pertes vers l'extérieur.

Dans tous ces cas, la formule (12) changée de signe donne la puissance consommée par le milieu :

$$(13) \quad P = \frac{\omega}{4\pi^2} \operatorname{Im} \int_{\Gamma} dk \frac{\psi \psi^*}{D}$$

Cette formule (13) généralise (6) pour le cas où il existe des modes croissants ($k_n \in Z^-$ ou $k_m \in Z^+$) .

En l'absence de modes croissants, le parcours Γ se réduit à l'axe réel, puisqu'alors les k_n sont dans Z^+ et les k_m dans Z^- .

Cette formule généralise aussi (6) pour le cas stable sans collisions (D réelle) : le parcours Γ doit contourner par en dessous les racines k_n et par dessus les racines k_m . On s'aperçoit alors que $P \neq 0$.

Chap. 6 - Connexion avec le critère de Sturrock : énergie échangée avec les modes k réel -

L'intégrale qui figure dans la formule (13) reçoit une contribution significative chaque fois que l'on passe au voisinage de l'une des racines de $D = 0$ par en dessous s'il s'agit d'une racine k_n et par dessus s'il s'agit d'une racine k_m . On adopte le modèle multifluide.

Considérons une petite portion du parcours Γ définie par :

$$\begin{aligned} k &= k_r - i\varepsilon && \text{s'il s'agit d'une racine } n \\ k &= k_r + i\varepsilon && \text{s'il s'agit d'une racine } m \end{aligned}$$

En l'absence de collisions, D est réelle sur ω et k réels ; on a sur Γ :

$$D = D_r - i\varepsilon \partial_{k_n} D \quad (\text{cas d'une racine } n)$$

$$D = D_r + i\varepsilon \partial_{k_m} D \quad (\text{cas d'une racine } m)$$

On note que $\Psi\Psi^*$ est réelle et positive sur ω et k réels, et que dk est réel. Au voisinage de $D_r = 0$, la contribution de l'intégrale est du signe de

$$\omega \partial_{k_n} D \quad (\text{cas d'une racine } n)$$

$$- \omega \partial_{k_m} D \quad (\text{cas d'une racine } m)$$

Ainsi, un mode réel n ou m consomme de l'énergie (tendance stable) si

$$\omega \partial_{k_n} D > 0 \quad \text{ou} \quad \omega \partial_{k_m} D < 0 \quad (\text{fig 5})$$

(14) et produit de l'énergie (tendance instable) si :

$$\omega \partial_{k_n} D < 0 \quad \text{ou} \quad \omega \partial_{k_m} D > 0$$

Il est remarquable que le sens de ce transfert d'énergie sans collisions conduise à la même classification des modes réels que l'étude (cinématique) de leur tendance croissante ou décroissante en présence de collisions. En effet (annexe 1), les modes réels "stables" deviennent

décroissants en présence de collisions, alors que les modes réels "instables" deviennent croissants dans une certaine bande de fréquence.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessous (fig. 5) de l'interaction électrostatique "faisceau-plasma", le seul mode réel générateur d'énergie est le mode baptisé "onde lente du faisceau". [1]

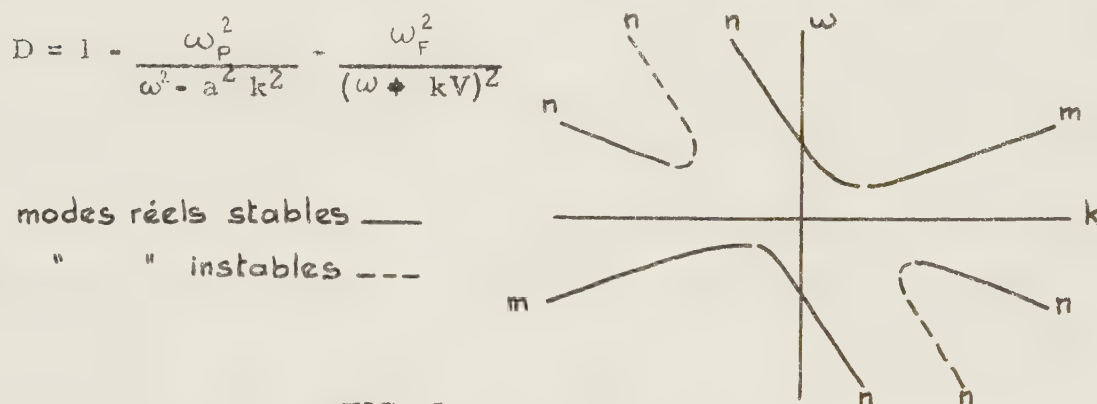


FIG. 5

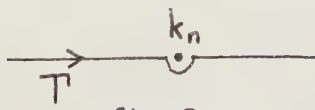
On voit que l'étude du sens du transfert d'énergie correspondant à chaque mode nous conduit à la même classification que Sturrock en ce qui concerne les branches de la courbe de dispersion. Cependant, on obtient un renseignement supplémentaire, à savoir que sur une branche "instable", l'un des modes seulement est responsable de la relaxation.

Le caractère instable du milieu (ondes croissantes) étant lié au fait que certains modes sont générateurs d'énergie, les formules (14) constituent un critère énergétique d'instabilité.

Chap. 7 - Connexion avec l'amortissement de Landau -

L'étude qui précède montre que lorsqu'on excite un mode k réel, le milieu consomme une certaine puissance, même si l'on néglige les collisions et l'amortissement de Landau. On appellera ce phénomène "dispersion spatiale" puisque c'est le fait que K dépend de k qui en est à l'origine. $D(\omega, k)$ étant une fonction réelle de ω et k , la contribution d'un

zéro k_n réel à l'intégrale $\text{Im} \int_{\Gamma} \frac{\Psi \Psi^*}{D} dk$ est (fig. 6) :

$$\text{Im} \left\{ P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi \Psi^*}{D} dk + \frac{i\pi \Psi \Psi^*}{D'_k} \right\} = \frac{\pi \Psi \Psi^*}{D'_k}$$


The diagram shows a horizontal real axis with an arrow pointing to the right. A pole is marked with a small circle and a dot on the axis, labeled k_n . Below the axis, the text "fig 6" is written.

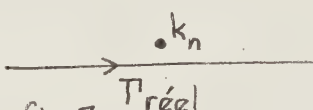
Comparons ce résultat avec celui que fournirait le traitement microscopique incluant l'effet Landau.

$D(\omega, k)$ est alors une fonction complexe, s'écrivant sur ω et k réel :

$$D = D_r + i D_i \quad \text{avec, si } \left| \frac{\omega}{k} \right| \gg v_{th}$$

$$D_r = 1 + \frac{4\pi e^2}{m\omega k} P \int dv \frac{v \partial_v f_0}{v + \omega/k} \quad D_i = -\frac{4\pi e^2}{mk^2} \left(\partial_v f_0 \right)_{-\frac{\omega}{k}}$$

Au voisinage d'un zéro de D_r tel que $k_r < 0$, on écrit :

$$D_r \sim (k - k_r) D'_k \quad D_i \sim c t z \quad D'_k \sim c t z$$


The diagram shows a horizontal real axis with an arrow pointing to the right. A pole is marked with a small circle and a dot on the axis, labeled k_n . Below the axis, the text "fig 7" and " $\Gamma_{réel}$ " are written.

$$\text{Im} \frac{1}{D} = \frac{-D_i}{(k - k_r)^2 D_k'^2 + D_i^2} \quad \text{donc la contribution du zéro est (fig. 7) :}$$

$$\text{Im} \int_{\Gamma} \frac{\Psi \Psi^*}{D} dk \sim \int_{\Gamma} \Psi \Psi^* \frac{-D_i}{D_k'^2 (\xi - i \frac{D_i}{D'_k}) (\xi + i \frac{D_i}{D'_k})} d\xi = \frac{\pi \Psi \Psi^*}{D'_k} \quad (\text{indépendant de } D_i)$$

Ainsi, en ce qui concerne la puissance absorbée, les théories multifluide et cinétique donnent le même résultat, dans la limite des grandes ondes.

Ce résultat, en faisant la jonction entre les théories cinétique et multifluide, confirme le fait que l'effet Landau a pour cause un mécanisme purement cinématique : le mélange de phases des ondes infiniment voisines, qui désorganise le paquet d'ondes ; l'énergie ne peut pas subsister dans une bande étroite de fréquences et de nombres d'ondes.

Chap. 8 - Cas d'une source bien localisée dans l'espace. Etude des ondes électrostatiques -

Pour vérifier et illustrer les résultats généraux obtenus, il est utile de développer les calculs en précisant la forme du courant de source. Considérons d'abord une source bien localisée dans l'espace et discontinue, réalisable en faisant passer un courant entre deux grilles plongées dans le plasma : (fig 8)

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}(x,t) &= \mathcal{J}_0 \sin \omega_0 t \quad \text{pour } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ &= 0 \quad \text{ailleurs} \end{aligned}$$

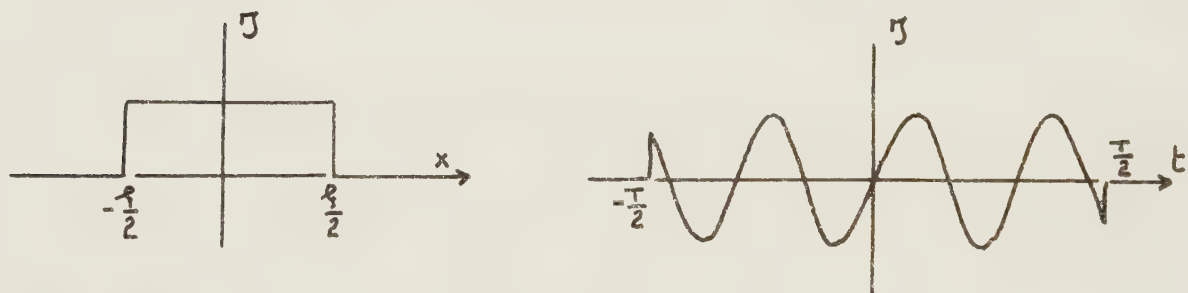


fig:8

Les calculs développés dans l'annexe 4 montrent que le champ est nul avant le passage du front d'onde le plus rapide, qui se déplace à une vitesse égale à la plus grande vitesse de groupe à l'infini $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(-\frac{d\omega}{dk} \right)$ des modes n dans $x > 0$ et des modes m dans $x < 0$.

Après le passage des fronts d'ondes correspondant aux différents modes et pendant le fonctionnement de la source, le champ et le courant sont donnés par les formules (26) (27) (28) (29). A l'extérieur de la source, le champ et le courant sont en quadrature, de sorte que toute la puissance est consommée à l'intérieur de la source $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$. Le calcul direct

de la puissance consommée par le milieu confirme la formule (13) qui s'écrit dans ce cas :

$$(16) \quad P_{\omega} = \frac{2\pi J_0^2}{\omega_0} \operatorname{Im} \left\{ \sum_n \frac{e^{ik\xi} - 1}{ik^2 D'_k} - \sum_m \frac{e^{-ik\xi} + 1}{ik^2 D'_k} \right\}$$

Si $|k\xi| \ll 1$ (ondes grandes par rapport à l'étendue de la source) :

$$(17) \quad P_{\omega} \sim \frac{\pi J_0^2 \xi^2}{\omega_0} \Re \left\{ \sum_n \frac{1}{D'_k} - \sum_m \frac{1}{D'_k} \right\}$$

L'énergie peut être consommée ou générée par le milieu,

Pour une fréquence suffisamment élevée, tous les $k_n \xi$ sont $\gg 1$.

Si $|k\xi| \gg 1$ (ondes petites par rapport à l'étendue de la source)

$$\begin{aligned} P_{\omega} &\sim \frac{2\pi J_0^2 \xi}{\omega_0} \operatorname{Im} \sum_{nm} \frac{1}{k D'_k} = \frac{2\pi J_0^2 \xi}{\omega_0} \operatorname{Im} \frac{1}{D(\omega_0)} \quad * \\ &= \frac{2\pi J_0^2 \xi \Omega^2 \nu}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \nu^2 \omega^2} > 0 \quad \text{où } \Omega^2 = \sum_i \omega_i^2 \text{ (v. annexe 1)} \end{aligned}$$

et le milieu devient dissipatif, même en présence de faisceaux.

Pour préciser la connexion avec le critère de Sturrock, on va examiner la contribution de chaque type de branche de la courbe de dispersion en utilisant la formule (16) dans la limite $\nu \rightarrow 0$

1) Dans le cas d'une branche stable (fig. 9), l'un des modes est de classe n , l'autre de classe m . En dehors de la bande de fréquences donnant les modes k complexes évanescents, k et D'_k sont réels et la contribution correspondante s'écrit :

$$P = \frac{2\pi J_0^2}{\omega_0} \left\{ \frac{1 - \cos k_1 \xi}{k_1^2 D'_{k_1}} - \frac{1 - \cos k_2 \xi}{k_2^2 D'_{k_2}} \right\}$$

Puisque $\omega D'_{k_1} > 0$ et $\omega D'_{k_2} < 0$, les deux modes réels stables consomment de l'énergie.

* D'après la forme de D (annexe 1) on a $\sum_{nm} \frac{1}{k D'_k} = 1 - \frac{1}{D(\omega, 0)}$

Dans la bande d'évanescence, on a $k_2 = k_1^*$ et la contribution

s'écrit :

$$P = \frac{2\pi \mathcal{I}_0^2}{\omega_0} \mathcal{R} \left\{ \frac{1 - e^{ik_1 \ell}}{k_1^2 D'_{k_1}} - \frac{1 - e^{-ik_1^* \ell}}{k_1^{2*} D'_{k_1^*}} \right\} \equiv 0$$

Les modes évanescent ne consomment pas d'énergie.

2) Dans le cas d'une branche instable (fig.10) les deux modes sont de même classe, par exemple n. Si ces modes sont réels, on a :

$$P = \frac{2\pi \mathcal{I}_0^2}{\omega_0} \left\{ \frac{1 - \cos k_1 \ell}{k_1^2 D'_{k_1}} + \frac{1 - \cos k_2 \ell}{k_2^2 D'_{k_2}} \right\}$$

Puisque $\omega D'_{k_1} > 0$ et $\omega D'_{k_2} < 0$, le mode 1 (normal) consomme de l'énergie, alors que le mode 2 (anormal) en produit.

Pour les modes complexes, on a $(k_i \in \mathbb{Z}^+)$

$$P = \frac{2\pi \mathcal{I}_0^2}{\omega_0} \mathcal{R} \left\{ \frac{1 - e^{ik_1 \ell}}{k_1^2 D'_{k_1}} + \frac{1 - e^{-ik_1^* \ell}}{k_1^{2*} D'_{k_1^*}} \right\} = \frac{4\pi \mathcal{I}_0^2}{\omega_0} \mathcal{R} \frac{1 - e^{ik_1 \ell}}{k_1^2 D'_{k_1}}$$

au voisinage du point double, $\omega - \omega_c \sim \alpha(k - k_c)^2$ et $D'_k \sim -2\alpha D'_\omega(k - k_c)$ de sorte que $P < 0$. Les modes complexes instables fournissent de l'énergie, au moins pour les fréquences voisines des points critiques.

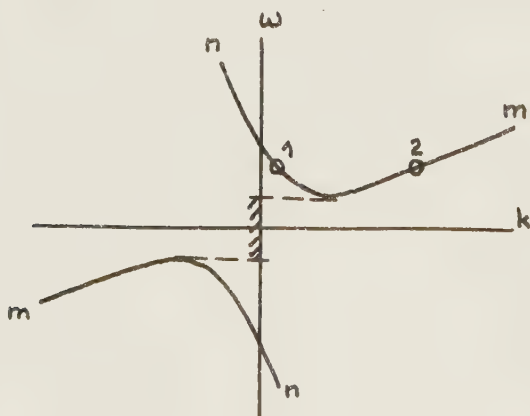


fig9: branche stable

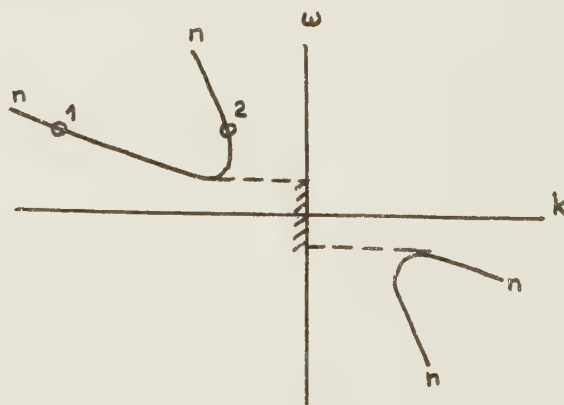


fig10: branche instable

Applications : Cas d'un plasma isotrope :

$$D = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\nu) - a^2 k^2}$$

On a deux modes k_n et k_m donnés par

$$ak = \pm \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2 - i\nu\omega} \quad (+m, -n)$$

La formule (16) se réduit à :

$$P = \frac{2\pi J_0^2}{\omega_0} \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{ik_n \xi} - 1 - ik_n \xi}{ik_n^3 D'_{k_n}} - \frac{e^{-ik_m \xi} - 1 + ik_m \xi}{ik_m^3 D'_{k_m}} \right\}$$

$$P = \frac{4\pi J_0^2}{\omega_0} \operatorname{Im} \frac{e^{ik_n \xi} - 1 - ik_n \xi}{ik_n^3 D'_{k_n}}$$

$$(19) \quad P = \frac{-2\pi J_0^2 a}{\omega_0} \Re \frac{\omega_p^2 (e^{-i\frac{\xi}{a} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2 - i\nu\omega}} - 1 + i\frac{\xi}{a} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2 - i\nu\omega})}{(\omega^2 - \omega_p^2 - i\nu\omega) \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2 - i\nu\omega}} \quad (\text{fig 11})$$

pour les fréquences voisines de la fréquence plasma telles que $k\xi \ll 1$

soit $(\omega^2 - \omega_p^2)^2 + \nu^2 \omega^2 \ll \frac{a^4}{\xi^4}$ (il en existe si $\nu \ll \frac{a^2}{\omega_p \xi^2} = \frac{a \lambda_D}{\xi^2}$)

on a :

$$P \sim \frac{\pi J_0^2 \xi^2 \omega_p^2}{a\omega \sqrt{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 + \nu^2 \omega^2}} \Re \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2 - i\nu\omega} \quad P_{\max} \sim \frac{\pi \sqrt{2} J_0^2 \xi^2}{2a} \sqrt{\frac{\omega_p}{\nu}}$$

pour les fréquences très élevées (et très basses si $\xi \frac{\omega_p}{a} = \frac{\xi}{\lambda_D} \gg 1$) telles que $k\xi \gg 1$

soit $(\omega^2 - \omega_p^2)^2 + \nu^2 \omega^2 \gg \frac{a^4}{\xi^4}$ on a :

$$P \sim \frac{2\pi J_0^2 \xi \nu \omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 + \nu^2 \omega^2} \quad P_{\max} \sim \frac{2\pi J_0^2}{\nu}$$

En l'absence de collisions, la formule (19) se réduit à :

$$P_{\nu=0} = \frac{2\pi J_0^2 \ell \omega_p^2 [\cos \frac{\ell}{2} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} - 1]}{\omega(\omega^2 - \omega_p^2) \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} \quad \text{pour } \omega > \omega_p$$

$$= 0 \quad \text{pour } \omega < \omega_p$$

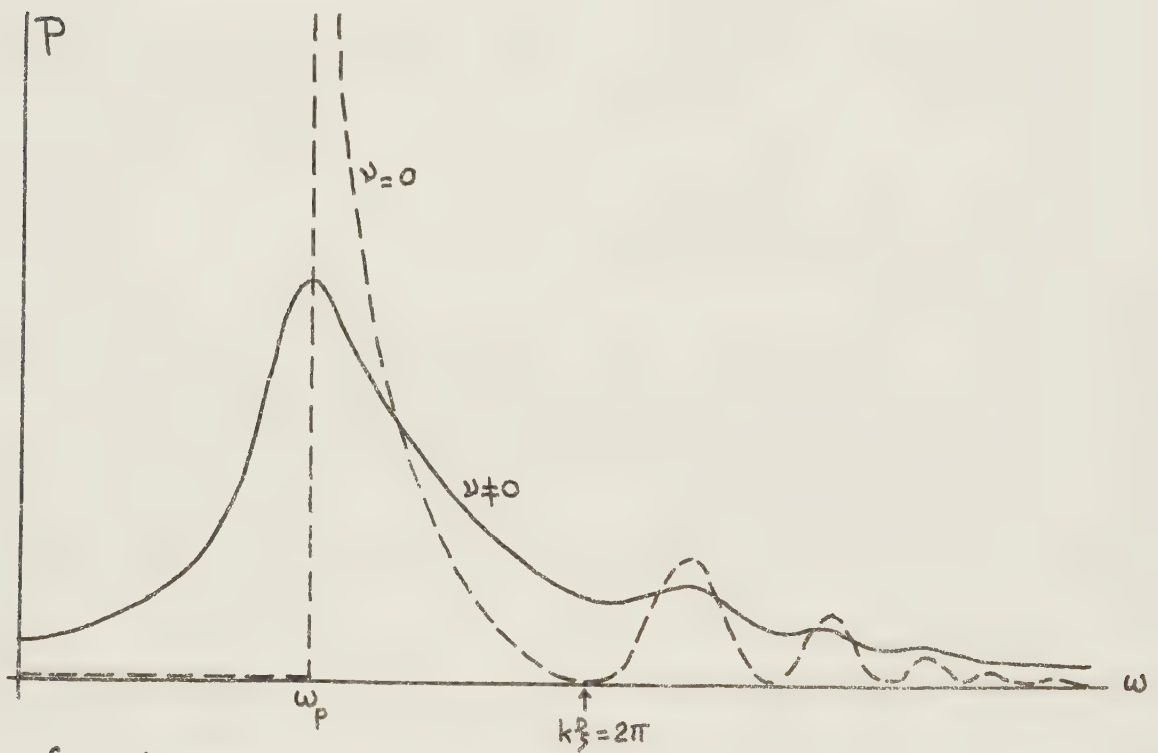


fig 11

On note que l'absorption présente un caractère différent suivant l'étendue de la source comparée aux longueurs d'ondes et aux distances d'atténuation. Les petites oscillations représentées sur la figure (11) pour $\omega > \omega_p$ sont dues à la dimension finie de la source.

Cas d'un faisceau monocinétique :

$$D = 1 - \frac{\omega_F^2}{(\omega + kV)(\omega - i\nu + kV)}$$

On a deux modes du type n donnés par

$$kV = -\omega + \frac{i\nu}{2} \mp \sqrt{\omega_F^2 - \frac{\nu^2}{4}}$$

(1) donne :

$$P = \frac{2\pi J_0^2}{\omega_0} \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{ik_1 \xi} - 1 - ik_1 \xi}{ik_1^2 D_{k_1}'} + \frac{e^{ik_2 \xi} - 1 - ik_2 \xi}{ik_2^2 D_{k_2}'} \right\}$$

$$(20) \quad P \sim \frac{\pi J_0^2 \xi^4 \omega_F^2}{6V^3} \quad \text{pour } k\xi \ll 1$$

$$P \sim \frac{2\pi J_0^2 \xi \omega_F^2 \nu}{(\omega_F^2 - \omega^2)^2 + \nu^2 \omega^2} \quad \text{pour } k\xi \gg 1$$

En l'absence de collisions on a la formule bien connue (klystrons) :

$$P = \frac{\pi J_0^2 \omega_F}{\omega_0 V} \left\{ \frac{1 - \cos k_2 \xi}{k_2^2} - \frac{1 - \cos k_1 \xi}{k_1^2} \right\} \quad (k_1 < k_2)$$

Le mode 1 fournit de l'énergie et le mode 2 en consomme.

Globalement, l'énergie passe du faisceau à la source ou inversement, suivant la fréquence.

Chap. 9 - Cas d'une source bien localisée dans l'espace. Etude des ondes électromagnétiques - ($\vec{k} \parallel \vec{B}_0$).

Les expressions du champ et du courant sont données dans l'annexe 5, ainsi que le calcul de la puissance consommée. On trouve que

toute la puissance est consommée à l'extérieur de la source et donné par (13).
ou (16)

Dans le cas du plasma froid sans collisions, la forme générale du noyau de dispersion est :

$$D = 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{4\pi}{i\omega} K(\omega)$$

On a deux racines opposées k_1 et k_2 de classes n et m et la formule (13) donne :

$$(21) \quad P = \frac{-2\pi J_0^2 \omega (1 - \cos k_1 \xi)}{c^2 k_1^3} \quad \text{pour } k_1 \text{ réel } < 0$$

$$= 0 \quad \text{pour } k_1 \text{ complexe}$$

Les modes réels consomment de l'énergie, les modes complexes évanescents n'en consomment pas.

Application à l'onde EM polarisée : ($\vec{k} \parallel \vec{B}_0$)

Le noyau de dispersion s'écrit :

$$D = 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \Omega)}$$

On a deux modes donnés par : (fig 12)

$$kc = \pm \omega \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2 - \omega \Omega}{\omega(\omega - \Omega)}} = \pm \sqrt{\frac{\omega(\omega - \Omega_1)(\omega - \Omega_2)}{(\omega - \Omega)}}$$

4 points critiques réels $\omega = 0, \Omega, \Omega_1, \Omega_2$, que l'on contourne par en dessous pour classer les racines et les localiser. (Fig 13)

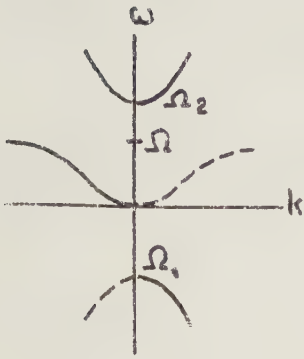


Fig: 12

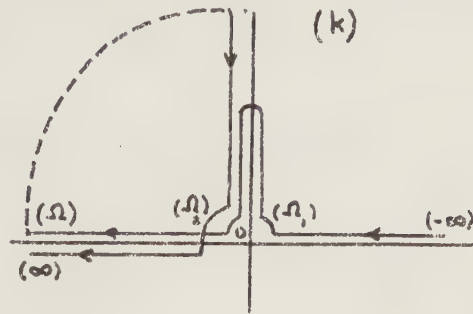
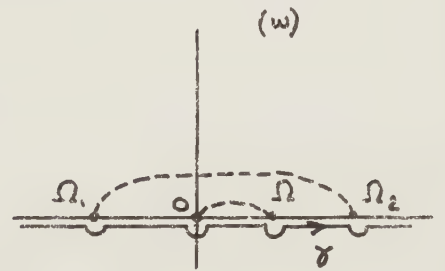
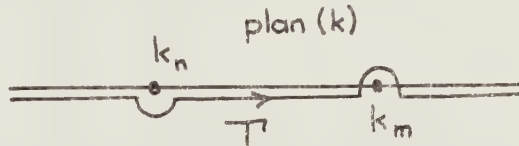


Fig: 13



Le contour Γ doit passer au dessous de k_n et au dessus de k_m (Fig 14)

Fig: 14



$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\gamma_0^2}{\omega} \operatorname{Im} \int_{\Gamma} dk \left\{ \frac{1 - e^{ik\ell}}{k^2} + \frac{1 - e^{-ik\ell}}{k^2} \right\} \frac{1}{D} \\
 &= \frac{2\pi\gamma_0^2}{\omega} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\ell}{D(0)} + i \frac{1 - e^{ik_n\ell}}{k_n^2 D'_{k_n}} - i \frac{1 - e^{-ik_m\ell}}{k_m^2 D'_{k_m}} \right\} \\
 &= \frac{2\pi\gamma_0^2}{\omega} \Re \left\{ \frac{-i\ell}{D(0)} + \frac{1 - e^{ik_n\ell}}{k_n^2 D'_{k_n}} - \frac{1 - e^{-ik_m\ell}}{k_m^2 D'_{k_m}} \right\}
 \end{aligned}$$

Or $D(0)$ est réelle. $k_m = -k_n$ et $D'_{k_m} = -D'_{k_n}$. D'où :

$$P = \frac{4\pi J_0^2}{\omega} \Re \frac{1 - e^{ik_n \ell}}{k_n^2 D'_{k_n}} = \frac{2\pi J_0^2 (\omega - \Omega)}{(\omega - \Omega_1)(\omega - \Omega_2)} \Re \frac{e^{ik_n \ell} - 1}{k_n} \quad (\text{fig 15})$$

$P = 0$ pour k complexe. Les modes évanescents n'absorbent pas d'énergie
 Dans la bande de propagation on a :

$$(22) \quad P = \frac{2\pi J_0^2 (\omega - \Omega) (\cos k_n \ell - 1)}{(\omega - \Omega_1)(\omega - \Omega_2) k_n} \quad \text{toujours} \geq 0$$

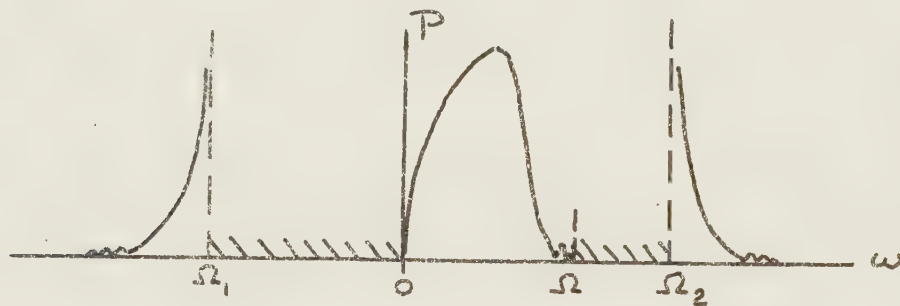


Fig : 15 . Les petites oscillations sont dues à la dimension finie de la source.

Chap.10 - Cas d'une source bien répartie -

Les calculs du champ, du courant et de la puissance sont développés en annexe ⁶ pour un courant de source de la forme $J = J_0 e^{-\alpha|x|} \sin \omega_0 t$

La formule (13) donne dans ce cas :

$$(23) \quad P = \frac{16\alpha^2 J_0^2}{\omega_0} \operatorname{Im} \int_{\Gamma} \frac{dk}{(\alpha^2 + k^2)^2 D(k)}$$

Dans le cas du plasma froid sans collisions, le noyau de dispersion des ondes EM s'écrit $D = 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{4\pi}{i\omega} K(\omega)$ et (23) donne :

$$(24) \quad P = \frac{-16\pi J_0^2 \omega \alpha^2}{c^2 k_i (\alpha^2 + k_i^2)^2} > 0 \quad \text{pour } k_i \text{ réel} < 0$$

$$= 0 \quad \text{pour } k_i \text{ complexe}$$

Comme dans le modèle précédent, les modes évanescents ne consomment pas d'énergie, les modes réels en consomment, mais ils en consomment d'autant moins que α est plus petit.

ANNEXE 1

Symétries et comportement des racines de l'équation de dispersion :

Si l'on décrit par les équations macroscopiques un plasma contenant plusieurs composantes i , de vitesse moyenne V_i et de vitesse thermique α_i , le noyau de dispersion pour les ondes électrostatiques se présente sous la forme :

$$D_{\nu}(\omega, k) = 1 - \sum_i \frac{\omega_i^2}{(\omega + kV_i)(\omega - i\nu + kV_i) - \alpha_i^2 k^2} \quad \begin{array}{l} \text{(les } i \text{ représentent les} \\ \text{diverses composantes du} \\ \text{plasma et les } \nu_i \text{ sont suppo-} \\ \text{sés égaux)} \end{array}$$

On note d'abord la symétrie $D(-\omega, -k^*) = D^*(\omega, k)$. En particulier

$$D(-\omega, 0) = D^*(\omega, 0)$$

Cette symétrie entraîne :

$$k(-\omega) = -k^*(\omega) \quad \text{et}$$

$$D'_k(-\omega, k(-\omega)) = -D'^*_k(\omega, k(\omega))$$

En particulier

$$k(0) = -k^*(0)$$

$$D'_k(0, k(0)) = -D'^*_k(0, k(0))$$

On observe les mêmes symétries pour l'équation de dispersion des ondes électromagnétiques, pour $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$.

Par ailleurs, on voit que $k^*(\omega)$ est racine de l'équation $D_{-\nu} = 0$.

Lorsque $\text{Im}(\omega) = \frac{\nu}{2}$, les racines k sont réelles ou complexes conjuguées, données au premier ordre par l'équation $\mathcal{D}_0(\omega, k) = 0$

Pour $\text{Im}(\omega) = 0$, ces racines subissent un déplacement donné au premier ordre par :

$$\Delta k = -i \frac{\nu}{2} \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\nu=0}$$

Cette relation permet de localiser les racines dans le plan complexe, suivant la fréquence ω et la nature des branches auxquelles elles appartiennent : (fig 16 à 22)

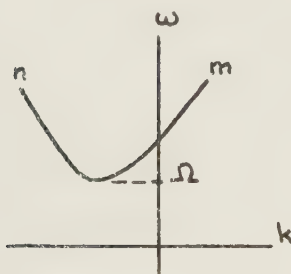


fig: 16
branche stable

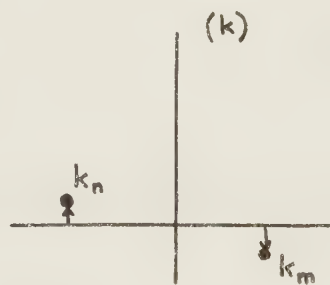


fig:17 ($\omega > \Omega$)
modes réels (décroissants)

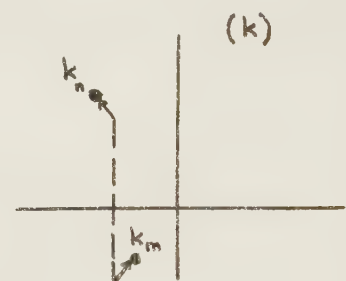


fig:18 ($\omega < \Omega$)
modes évanescents

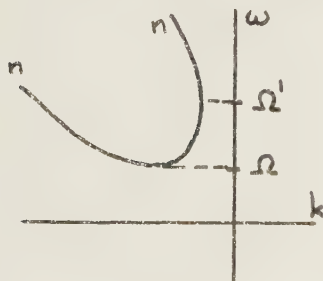


Fig: 19
branche instable

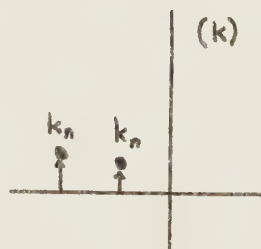


fig:20 ($\omega > \Omega'$)
modes réels
(décroissants)

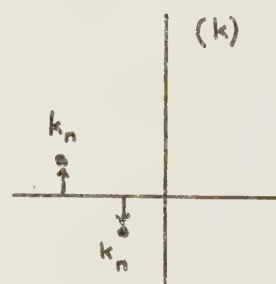


fig:21 ($\Omega < \omega < \Omega'$)
modes réels
(l'un est croissant)

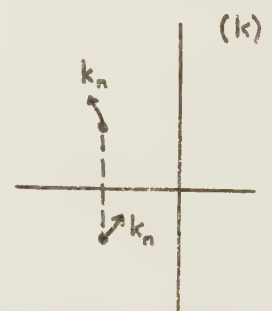


Fig 22 ($\omega < \Omega$)
modes complexes
(l'un est croissant)

ANNEXE 2

Sur la décomposition de $E(\omega, k)$ en la somme de deux fonctions holomorphes dans des $\frac{1}{2}$ plans associés :

En général $E(\omega, k)$ n'est pas une fonction holomorphe dans deux $\frac{1}{2}$ plans associés $\text{Im}(\omega) < \delta$, $\text{Im}(k) < \Gamma$ ou $\text{Im}(k) > \Gamma$. Ceci n'arrive qu'exceptionnellement lorsque toutes les racines $k(\omega)$ sont de même classe, par exemple dans l'interaction entre plusieurs faisceaux ayant la même direction.

Cependant, il est toujours possible de décomposer $E(\omega, k)$ en la somme de fonctions présentant les mêmes singularités* (à une fonction entière additive près, nulle si la source est localisée en $x=0$).

$$E(\omega, k) = \sum_i \frac{1}{(k - k_i)} \text{Résidus de } E \quad \text{soit :}$$

$$E(\omega, k) = \frac{4i\pi \mathcal{J}(\omega, k)}{\omega \mathcal{D}(\omega, k)} = \frac{4i\pi}{\omega} \left\{ \sum_{n,m} \frac{\mathcal{J}(k_{nm})}{(k - k_{nm}) \mathcal{D}'_{k_{nm}}(\omega)} + \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{(k - \alpha) \mathcal{D}(\alpha)} \text{Rés } \mathcal{J} \right\} + h$$

Pour $\text{Im}(\omega)$ assez grand et négatif, il est toujours possible de décomposer $E(\omega, k)$ en la somme $E_1 + E_2$, E_1 étant holomorphe dans $\text{Im}(\omega) < \delta$, $\text{Im}(k) < 0$ et E_2 étant holomorphe dans $\text{Im}(\omega) < \delta$, $\text{Im}(k) > 0$. Cette décomposition est unique et donnée par :

$$E_1(\omega, k) = \frac{4i\pi}{\omega} \left\{ \sum_n \frac{\mathcal{J}(k_n)}{(k - k_n) \mathcal{D}'_{k_n}} + \sum_{\alpha} \frac{1}{(k - \alpha) \mathcal{D}(\alpha)} \text{Rés } \mathcal{J}_1 \right\} + h_1$$

$$E_2(\omega, k) = \frac{4i\pi}{\omega} \left\{ \sum_m \frac{\mathcal{J}(k_m)}{(k - k_m) \mathcal{D}'_{k_m}} + \sum_{\beta} \frac{1}{(k - \beta) \mathcal{D}(\beta)} \text{Rés } \mathcal{J}_2 \right\} + h_2$$

* On suppose que ces singularités sont des pôles simples.

ANNEXE 3

Bilan d'énergie :

Les deux dernières équations de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \left\{ \partial_t \vec{E} + 4\pi (\vec{J} + \vec{J}_s) \right\} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \partial_t \vec{B} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\vec{E} \text{ et } \vec{B} = \text{champ total}) \\ \vec{J} = \text{courant propre du plasma} \\ \vec{J}_s = \text{courant de source} \end{array}$$

conduisent à la loi de conservation locale (théorème de Poynting) :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) + \partial_t \frac{1}{2} (\vec{B}^2 + \vec{E}^2) + \frac{4\pi}{c^2} \vec{E} \cdot (\vec{J} + \vec{J}_s) = 0$$

En faisant la moyenne dans le temps et en intégrant dans le volume $\mathcal{V}$, on obtient, pour un état stationnaire d'oscillations :

$$\frac{4\pi}{c^2} (P + P_s) + \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) = 0$$

où $P = \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \vec{E} \cdot \vec{J}$ est la puissance totale absorbée par le plasma dans le volume $\mathcal{V}$ et où $P_s = \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \vec{E} \cdot \vec{J}_s$ est la puissance consommée par la source en régime stationnaire. Dans le cas des ondes électrostatiques ($\vec{B} = 0$) on a $P = -P_s$ quel que soit $\mathcal{V}$. Dans le cas des ondes électromagnétiques, on a $P = P_s$ si $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ et si ces ondes sont décroissantes dans l'espace.

Comme l'a montré BERS [4], la puissance absorbée par le milieu dans le volume $\mathcal{V}$ est en général en partie dissipée, en partie transmise. On peut illustrer ce fait très simplement dans le cas électrostatique unidimensionnel, en se plaçant en dehors des sources, où seuls existent les modes "libres" qui ont été excités. Le champ et le courant sont de la forme :

$$\begin{aligned} E &= \sum_n E_n(\omega) e^{i[k_n(\omega)x + \omega t]} + \text{conj.} \quad (\omega \text{ est réel, } k_n \text{ est complexe}) \\ J &= \sum_n J_n(\omega) e^{i[k_n(\omega)x + \omega t]} + \text{conj.} \end{aligned}$$

avec $J_n(\omega) = K(\omega, k_n(\omega)) E_n(\omega)$

Les $k_n(\omega)$ étant racines de l'équation $D=1+\frac{4\pi}{i\omega} K(\omega, k)=0$, on a $\dot{K}(\omega, k_n)=-\frac{i\omega}{4\pi}$,

de sorte que E et J sont en quadrature dans le temps. Il n'y a pas d'apport extérieur de puissance et la puissance absorbée par le milieu est nulle.

Cela ne signifie pas que la puissance dissipée soit nulle. En effet, si l'on pose $k_n=k_r+ik_i$ ($k_i \ll k_r$) et si $K(\omega, k)$ est analytique, on peut écrire :

$$K(\omega, k_n) = K(\omega, k_r) + ik_i \frac{\partial K(\omega, k)}{\partial k} = K(\omega, k_r) + ik_i \frac{\partial (K_r + iK_i)}{\partial k_r}$$

Dans le cas où un seul mode est excité dans l'espace considéré, on voit que :

$$\langle E, J \rangle_t = E_n E_n^* [K(\omega, k_n) + K^*(\omega, k_n)] e^{-2k_i x} \quad \text{soit}$$

$$\langle E, J \rangle_t = E_n E_n^* \left[2K_r(\omega, k_r) - 2k_i \frac{\partial K_i(\omega, k_r)}{\partial k_r} \right] e^{-2k_i x}$$

Le premier terme représente la densité de puissance dissipée par les collisions p_d ; il serait nul si $\nu = 0$. Le deuxième terme représente la différence entre les flux d'énergie entrant et sortant de l'élément de volume considéré p_M . Dans cet exemple, ces deux termes sont égaux ; il n'y a aucun apport extérieur d'énergie ; l'élément de volume considéré n'absorbe aucune puissance, mais il dissipe une certaine puissance au détriment de l'onde dont l'amplitude décroît (ou inversement).

Ce bilan local d'énergie est important pour comprendre de quelle façon le milieu absorbe - ou engendre - l'énergie lorsqu'il est excité par la source. Du point de vue de la source, cette distinction disparaît et toutes les formules dérivées de (12) donnent la puissance "globale" fournie par la source et absorbée par le milieu ou inversement, sans préciser si cette puissance est localement dissipée ou transmise par le milieu.

La situation est beaucoup plus compliquée si le volume considéré contient des sources ou si plusieurs modes coexistent (la puissance dissipée n'est pas la somme des puissances dissipées par chacun des modes).

ANNEXE 4

Cas d'une source bien localisée dans l'espace. Etude des ondes électrostatiques :

On se donne un courant de source de la forme :

$$J(x,t) = J_0 \sin \omega_0 t$$

pour $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ et $-\frac{\ell}{2} < x < \frac{\ell}{2}$, $= 0$ ailleurs.

La transformée de Fourier de ce courant est :

$$J(\omega, k) = \frac{2i}{k} \sin k \frac{\ell}{2} \left\{ \frac{\sin(\omega + \omega_0) \frac{T}{2}}{(\omega + \omega_0)} - \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{T}{2}}{(\omega - \omega_0)} \right\} J_0$$

Cette fonction est entière et donc $J(x, t)$ peut s'obtenir en intégrant $J(\omega, k)$ sur n'importe quels parcours homotopes aux axes ω et k réels. Dans le but de faciliter les intégrations, on décompose $J(\omega, k)$ de la façon suivante :

$$J(\omega, k) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \quad \text{en posant :}$$

$$J_1(\omega, k) = \frac{J_0}{2ik} \left\{ \frac{e^{ik \frac{\ell}{2} + i(\omega + \omega_0) \frac{T}{2}}}{(\omega + \omega_0)} - \frac{e^{ik \frac{\ell}{2} + i(\omega - \omega_0) \frac{T}{2}}}{(\omega - \omega_0)} \right\} \quad (\rightarrow 0 \text{ pour } k \in Z^+, \omega \in Z^+)$$

$$J_2(\omega, k) = \frac{J_0}{2ik} \left\{ \frac{e^{ik \frac{\ell}{2} - i(\omega - \omega_0) \frac{T}{2}}}{(\omega - \omega_0)} - \frac{e^{ik \frac{\ell}{2} - i(\omega + \omega_0) \frac{T}{2}}}{(\omega + \omega_0)} \right\} \quad (\rightarrow 0 \text{ pour } k \in Z^+, \omega \in Z^-)$$

$$J_3(\omega, k) = \frac{J_0}{2ik} \left\{ \frac{e^{-ik \frac{\ell}{2} + i(\omega - \omega_0) \frac{T}{2}}}{(\omega - \omega_0)} - \frac{e^{-ik \frac{\ell}{2} + i(\omega + \omega_0) \frac{T}{2}}}{(\omega + \omega_0)} \right\} \quad (\rightarrow 0 \text{ pour } k \in Z^-, \omega \in Z^+)$$

$$J_4(\omega, k) = \frac{J_0}{2ik} \left\{ \frac{e^{-ik \frac{\ell}{2} - i(\omega + \omega_0) \frac{T}{2}}}{(\omega + \omega_0)} - \frac{e^{-ik \frac{\ell}{2} - i(\omega - \omega_0) \frac{T}{2}}}{(\omega - \omega_0)} \right\} \quad (\rightarrow 0 \text{ pour } k \in Z^-, \omega \in Z^-)$$

1) Expression du champ à l'extérieur de la source ($x > \frac{f}{2}$) :

Le champ s'écrit :

$$E(\omega, k) = \frac{4i\pi}{\omega D(\omega, k)} \left\{ J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \right\}$$

$$E(\omega, x) = 2i \int_{\Gamma} dk \frac{e^{ikx}}{\omega D} \left\{ J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \right\} \quad \text{soit, pour } x > \frac{f}{2} :$$

$$E(\omega, x) = -4\pi \sum_n \frac{e^{ik_n x}}{\omega D'_k(\omega, k_n)} \left\{ J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \right\}_{\omega, k_n}$$

$$(25) \quad E(x, t) = -2 \int_{\gamma} d\omega e^{i\omega t} \sum_n \frac{e^{ik_n x}}{\omega D'_k} \left\{ J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \right\}_{\omega, k_n}$$

Ce champ est bien nul pour $t < -\frac{T}{2}$ puisque $k_n \rightarrow \infty$ dans Z^+ quand $\omega \rightarrow \infty$ dans Z^- .

La formule (25) montre que le front d'ondes se déplace à une vitesse égale à h plus grande vitesse de groupe à l'infini $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(-\frac{d\omega}{dk} \right)$ des modes n dans $x > 0$, et des modes m dans $x < 0$

Après le passage des fronts d'ondes correspondant aux différents modes et pendant le fonctionnement de la source, le parcours d'intégration γ (fig 23) peut être reformé dans Z^+ pour la contribution de $J_1 + J_3$ et dans Z^- pour la contribution de $J_2 + J_4$, qui se trouve nulle. L'expression (25) donne :

$$\begin{aligned} E(x, t) = & -\frac{2\pi}{\omega_0} J_0 \sum_n \frac{e^{ik_n(0)x}}{k(0) D'_k(0)} \left\{ e^{i\omega_0 \frac{T}{2}} + e^{-i\omega_0 \frac{T}{2}} \right\} \left\{ e^{ik(0) \frac{f}{2}} - e^{-ik(0) \frac{f}{2}} \right\} + \\ & + \frac{2\pi}{\omega_0} J_0 \sum_n \frac{e^{i\omega_0 t + ik_n(\omega_0)x}}{k_n(\omega_0) D'_k(\omega_0)} \left\{ e^{ik_n(\omega_0) \frac{f}{2}} - e^{-ik_n(\omega_0) \frac{f}{2}} \right\} + \\ & + \frac{2\pi}{\omega_0} J_0 \sum_n \frac{e^{-i\omega_0 t + ik_n(-\omega_0)x}}{k_n(-\omega_0) D'_k(-\omega_0)} \left\{ e^{ik_n(-\omega_0) \frac{f}{2}} - e^{-ik_n(-\omega_0) \frac{f}{2}} \right\} \end{aligned}$$

- coupures ($n \leftrightarrow m$)

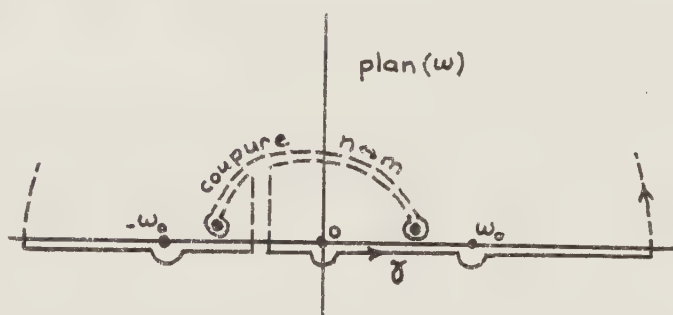
Soit, grâce aux symétries du noyau de dispersion (annexe¹) :

(Cas multifluide)

$$(26) \quad E(x,t) = -\frac{2\pi\gamma}{\omega_0} \sum_n \frac{e^{ik(\omega)x + i\omega_0 \frac{T}{2}}}{k(\omega) D'_k(\omega)} \left\{ e^{ik(\omega) \frac{t}{2}} - e^{-ik(\omega) \frac{t}{2}} \right\} +$$

$$\frac{2\pi\gamma}{\omega_0} \sum_n \frac{e^{ik(\omega_0)x + i\omega_0 t}}{k(\omega_0) D'_k(\omega_0)} \left\{ e^{ik(\omega_0) \frac{t}{2}} - e^{-ik(\omega_0) \frac{t}{2}} \right\} + \text{conjugué coupures}$$

fig23. Parcours γ . Les singularités sont les pôles $\omega=0$ et $\pm\omega_0$, et les coupures qui évitent les permutations $n \leftrightarrow m$.



Les points critiques Ω autour desquels les racines n et m permutent ($n \leftrightarrow m$) sont tous dans Z^+ (ou à la limite sur l'axe ω réel) et la contribution des coupures représente un transitoire, tendant vers zéro pour x donné, $t \rightarrow \infty$. La formule (26) donne alors le régime permanent qui s'établit en forme d'ondes croissantes ou décroissantes dans l'espace.

On reconnaît dans l'expression (26) l'effet d'écran qui s'atténue sur une distance $(\text{Im } k(\omega))^{-1}$ ainsi que les ondes progressives en $kx + \omega t$.

2) Expression du courant à l'extérieur de la source - puissance consommée :

On utilise la relation $J(\omega, k) = K(\omega, k) E(\omega, k)$

et l'on conduit le calcul comme précédemment; la singularité $\omega = 0$ disparaît car, en notant que pour un mode k_n , on a $D = 0 = 1 + \frac{4\pi}{i\omega} K(\omega, k)$ soit :

$$K(\omega, k_n) = \frac{-i\omega}{4\pi} \quad \text{on obtient :}$$

$$J(x, t) = \frac{J_0}{2} \sum_n \frac{-i e^{ik(\omega_0)x + i\omega_0 t}}{k(\omega_0) D'_k(\omega_0)} \left\{ e^{ik\frac{x}{2}} - e^{-ik\frac{x}{2}} \right\} + \text{conjugué - coupures}$$

En comparant cette expression à (26), on voit qu'au-delà de la zone d'écran, le champ et le courant sont en quadrature dans toute la zone où le régime permanent est établi. La moyenne dans le temps de EJ est nulle.

3) Expression du champ à l'intérieur de la source ($-\xi/2 < x < \xi/2$) :

On a encore :

$$E(\omega, x) = 2i \int_T dk \frac{e^{ikx}}{\omega D} \left\{ J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \right\}$$

mais cette fois le parcours T sera refermé dans Z^+ pour la contribution de $J_1 + J_2$ et dans Z^- pour celle de $J_3 + J_4$. On obtient :

$$E(\omega, x) = \frac{-4\pi}{\omega D(\omega_0)} (k J_1 + k J_2)_{k=0} - 4\pi \sum_n \frac{e^{ik_n x}}{\omega D'_k} (J_1 + J_2)_{k_n} + 4\pi \sum_m \frac{e^{ik_m x}}{\omega D'_k} (J_3 + J_4)_{k_m}$$

4) Expression du courant à l'intérieur de la source ($-\frac{f}{2} < x < \frac{f}{2}$) :

On conduit le calcul comme précédemment en remarquant que la singularité $\omega = 0$ disparaît. La singularité $k = 0$ subsiste et l'on a :

$$K(\omega_0, 0) = \frac{i\omega_0}{4\pi} [D(\omega_0) - 1]$$

on trouve :

$$(29) \quad J(x, t) = \frac{i}{2} \int_0^{\omega_0} e^{i\omega t} \left\{ 1 - \frac{1}{D(\omega_0)} \right\} - \frac{i}{2} \int_0^{\omega_0} e^{i\omega t} \sum_n \frac{e^{ik(\omega_0)(x + \frac{f}{2})}}{k(\omega_0) D'_k} - \frac{i}{2} \int_0^{\omega_0} e^{i\omega t} \sum_m \frac{e^{ik(\omega_0)(x - \frac{f}{2})}}{k(\omega_0) D'_k}$$

+ conjugué - coupures $n \leftrightarrow m$.

Si l'on calcule $\partial_t E$ on voit que :

$$4\pi (J + \mathcal{J}) + \partial_t E = 0 \quad \text{où } \mathcal{J} = \int_0^{\omega_0} \sin \omega t$$

Cette relation est la conséquence de $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0$ dans la dernière équation de Maxwell. Elle exprime qu'en régime permanent, le champ HF est en quadrature avec le courant total. Il en résulte que la densité de puissance consommée par le milieu à l'intérieur de la source est égale à la densité de puissance délivrée par la source.

Ceci confirme le fait qu'en régime permanent, le milieu ne consomme pas d'énergie à l'extérieur de la source, même en présence de collisions.

Puissance totale consommée par le milieu :

La puissance totale consommée par le milieu - égale à la puissance délivrée par la source - s'obtient en intégrant entre $-\frac{f}{2}$ et $\frac{f}{2}$ la moyenne du produit $E(x, t) J(x, t)$, ces grandeurs étant données par (28) et (29).

$$P = \frac{2\pi J_0^2}{\omega_0} \operatorname{Im} \int_{-\frac{f}{2}}^{\frac{f}{2}} dx \left\{ \frac{1}{D(\omega_0)} + \sum_n \frac{e^{ik(\omega_0)(x+\frac{f}{2})}}{k(\omega_0)D'_k} + \sum_m \frac{e^{ik(\omega_0)(x-\frac{f}{2})}}{k(\omega_0)D'_k} \right\} \quad \text{soit :}$$

$$(30) \quad P = \frac{2\pi J_0^2}{\omega_0} \operatorname{Im} \left\{ \frac{f}{D(\omega_0)} + \sum_n \frac{e^{ik\frac{f}{2}} - 1}{ik^2 D'_k} - \sum_m \frac{e^{-ik\frac{f}{2}} - 1}{ik^2 D'_k} \right\}$$

Cette expression est bien en accord avec la formule (13) où
 $\psi = \frac{4\pi J_0}{\omega_0 k} \operatorname{sinc} k \frac{f}{2}$. En notant que $\frac{1}{D(\omega_0)} + \sum_{nm} \frac{1}{k D'_k} \equiv 1$,
 la formule (30) s'écrit : (16)

$$P = \frac{2\pi J_0^2}{\omega_0} \operatorname{Im} \left\{ \sum_n \frac{e^{ik\frac{f}{2}} - ik\frac{f}{2} - 1}{ik^2 D'_k} - \sum_m \frac{e^{-ik\frac{f}{2}} + ik\frac{f}{2} - 1}{ik^2 D'_k} \right\}$$

ANNEXE 5

Cas d'une source bien localisée dans l'espace. Etude des ondes électromagnétiques :

Le calcul se conduit de façon identique, mais on note que la composante DC disparaît puisque $\omega D'_k(\omega, k(\omega)) \rightarrow \infty$ pour $\omega \rightarrow 0$. Par ailleurs, l'expression du courant est un peu différente car :

$$K(\omega, k_n) = \frac{-i\omega}{4\pi} \left(1 - \frac{k_n^2 c^2}{\omega^2}\right)$$

on obtient pour le régime permanent :

$$E_{\text{ext}} = \frac{2\pi J_0}{\omega_0} e^{i\omega_0 t} \sum_n \frac{e^{ikx}}{kD'_k} \left(e^{ik\frac{f}{2}} - e^{-ik\frac{f}{2}} \right) + \text{conj.}$$

$$E_{\text{int}} = \frac{2\pi J_0}{\omega_0} e^{i\omega_0 t} \left\{ \frac{1}{D(\omega_0)} + \sum_n \frac{e^{ik(x+\frac{f}{2})}}{kD'_k} + \sum_m \frac{e^{ik(x-\frac{f}{2})}}{kD'_k} \right\} + \text{conj.}$$

$$J_{\text{ext}} = \frac{-iJ_0}{2} e^{i\omega_0 t} \left\{ \sum_n \frac{e^{ikx} (e^{ik\frac{f}{2}} - e^{-ik\frac{f}{2}})}{kD'_k} \left[1 - \frac{k_n^2 c^2}{\omega_0^2} \right] \right\} + \text{conj}$$

$$J_{\text{int}} = \frac{-iJ_0}{2} e^{i\omega_0 t} \left\{ -1 + \frac{1}{D(\omega_0)} + \sum_n \frac{e^{ik(x+\frac{f}{2})}}{kD'_k} \left[1 - \frac{k_n^2 c^2}{\omega_0^2} \right] + \sum_m \frac{e^{ik(x-\frac{f}{2})}}{kD'_k} \left[1 - \frac{k_m^2 c^2}{\omega_0^2} \right] \right\} + \text{conj.}$$

(31)

Puissance consommée par la source :

Dans la notation de Fresnel :

$$J_s = -\frac{i}{2} J_0$$

$$E_{\text{int}} = \frac{2\pi J_0}{\omega_0} \left\{ \frac{1}{D(\omega_0)} + \sum_n \frac{e^{ik(x+\frac{f}{2})}}{kD'_k} + \sum_m \frac{e^{ik(x-\frac{f}{2})}}{kD'_k} \right\}$$

$$P_s = J E^* + J^* E = -\frac{2\pi J_0^2}{\omega_0} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{D(\omega_0)} + \sum_n \frac{e^{ik(x+\frac{f}{2})}}{kD'_k} + \sum_m \frac{e^{ik(x-\frac{f}{2})}}{kD'_k} \right\}$$

Soit en intégrant sur x de $-\frac{f}{2}$ à $\frac{f}{2}$:

$$P_s = -\frac{2\pi J_0^2}{\omega_0} \operatorname{Im} \left\{ \frac{f}{D(\omega_0)} + \sum_n \frac{e^{ikf} - 1}{ikD'_k} - \sum_m \frac{e^{-ikf} - 1}{ikD'_k} \right\}$$

Cette expression est bien en accord avec la formule (13).

Puissance consommée par le milieu supposé stable :

A l'intérieur de la source on décompose le courant J_{int} en une somme :

$$J_{\text{int}} = -J_s + J_1 + J_2 \quad \text{où } J_1 \text{ est en quadrature avec } E_{\text{int}}$$

La densité de puissance consommée est donnée par :

$$P_{\text{int}} = -P_s + J_2 E_{\text{int}}^* + J_2^* E_{\text{int}} \quad \text{soit}$$

$$P_{\text{int}} = -P_s + \frac{i\pi c^2 J_0^2}{\omega_0^3} \left\{ \sum_n \frac{ke^{ik(x+\frac{f}{2})}}{D'_k} + \sum_m \frac{ke^{ik(x-\frac{f}{2})}}{D'_k} \right\} \left\{ \frac{1}{D(\omega_0)} + \sum_n \frac{e^{-ik(x+\frac{f}{2})}}{k^* D_k'^*} + \sum_m \frac{e^{-ik(x-\frac{f}{2})}}{k^* D_k'^*} \right\} + \text{conj.}$$

Pour intégrer par parties, on pose :

$$U = -i \left\{ \sum_n \frac{e^{ik(x+\frac{\rho}{2})}}{D'_k} + \sum_m \frac{e^{ik(x-\frac{\rho}{2})}}{D'_k} \right\}$$

$$V = \frac{1}{D_{(0)}^*} + \sum_n \frac{e^{-ik^*(x+\frac{\rho}{2})}}{k^* D_k'^*} + \sum_m \frac{e^{-ik^*(x-\frac{\rho}{2})}}{k^* D_k'^*} \quad \text{de sorte que}$$

$$P_{\text{int}} = -P_s + \frac{i\pi c^2 J_0^2}{\omega_0^3} \partial_x U \cdot V - \frac{i\pi c^2 J_0^2}{\omega_0^3} \partial_x U^* \cdot V^*$$

Soit en intégrant sur x de $-\frac{\rho}{2}$ à $\frac{\rho}{2}$:

$$P_{\text{int}} = -P_s + \frac{i\pi c^2 J_0^2}{\omega_0^3} \left\{ [UV]_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} - \int_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} UV' dx \right\} + \text{conj.}$$

Mais $V' = -U^*$, donc l'intégrale $\int_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} UV' dx$ est réelle et ne donne pas de contribution. Il reste :

$$P_{\text{int}} = -P_s + \frac{i\pi c^2 J_0^2}{\omega_0^3} [UV]_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} + \text{conj.}$$

A l'extérieur de la source, dans $x > \frac{\rho}{2}$, on décompose le courant J_{ext} en une somme :

$$J_{\text{ext}} = J_1 + J_2 \quad \text{où } J_1 \text{ est en quadrature avec } E_{\text{ext}}$$

La densité de puissance consommée à l'extérieur est :

$$P_{\text{ext}} = J_{2, \text{ext}}^* E_{\text{ext}} + J_{2, \text{ext}} E_{\text{ext}}^* \quad \text{soit :}$$

$$P_{\text{ext}} = \frac{i\pi c^2 \gamma_0^2}{\omega_0^3} \left\{ \sum_n \frac{k e^{ikx} (e^{ik\frac{\rho}{2}} - e^{-ik\frac{\rho}{2}})}{D'_k} \right\} \left\{ \sum_n \frac{e^{-ik^*x} (e^{-ik^*\frac{\rho}{2}} - e^{ik^*\frac{\rho}{2}})}{k^* D'^{*}_k} \right\} + \text{conj.}$$

Pour intégrer par parties, on pose :

$$X = -i \sum_n \frac{e^{ikx} (e^{ik\frac{\rho}{2}} - e^{-ik\frac{\rho}{2}})}{D'_k}$$

$$Y = \sum_n \frac{e^{-ik^*x} (e^{-ik^*\frac{\rho}{2}} - e^{ik^*\frac{\rho}{2}})}{k^* D'^{*}_k}$$

$$P_{\text{ext}} = \frac{i\pi c^2 \gamma_0^2}{\omega_0^3} \partial_x X \cdot Y + \text{conj}$$

Soit en intégrant de $\frac{\rho}{2}$ à ∞ :

$$P_{\text{ext}}^+ = \frac{i\pi c^2 \gamma_0^2}{\omega_0^3} \left\{ [XY]_{\frac{\rho}{2}}^{\infty} - \int_{\frac{\rho}{2}}^{\infty} XY' dx \right\} + \text{conj}$$

puisque $Y' = -X^*$, l'intégrale est réelle et ne donne pas de contribution.

Par ailleurs, X et $Y \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow \infty$ (milieu stable). Donc :

$$(32) \quad \mathcal{P}_{\text{ext}}^+ = \frac{i\pi c^2 \mathcal{I}_0^2}{\omega_0^3} \left[XY \right]_{\frac{\ell}{2}}^{\infty} + \text{conj}$$

On calcule de la même façon la puissance consommée dans $x < -\frac{\ell}{2}$.

On trouve :

$$(33) \quad \mathcal{P}_{\text{ext}}^- = \frac{i\pi c^2 \mathcal{I}_0^2}{\omega_0^3} \left[ZW \right]_{-\infty}^{-\frac{\ell}{2}} + \text{conj} \quad \text{avec :}$$

$$Z = -i \sum_m \frac{e^{ikx} (e^{-ik\frac{\ell}{2}} - e^{ik\frac{\ell}{2}})}{\mathcal{D}'_k}$$

Z et $W \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow -\infty$

$$W = \sum_m \frac{e^{-ik^*x} (e^{ik^*\frac{\ell}{2}} - e^{-ik^*\frac{\ell}{2}})}{k^* \mathcal{D}'^{*}}$$

Pour obtenir la puissance totale consommée par le milieu, on fait la somme $\mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ext}}^+ + \mathcal{P}_{\text{ext}}^-$, en notant que :

$$U\left(\frac{\ell}{2}\right) = X\left(\frac{\ell}{2}\right) \quad \text{car} \quad \sum_{nm} \frac{1}{\mathcal{D}'_k} \equiv 0$$

$$U\left(-\frac{\ell}{2}\right) = Z\left(-\frac{\ell}{2}\right)$$

$$V\left(\frac{\ell}{2}\right) = Y\left(\frac{\ell}{2}\right) \quad \text{car} \quad \frac{1}{\mathcal{D}(0)} + \sum_{nm} \frac{1}{k \mathcal{D}'_k} \equiv 0$$

$$V\left(-\frac{\ell}{2}\right) = W\left(-\frac{\ell}{2}\right)$$

Il reste $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$ et

$$\mathcal{P} = -\mathcal{P}_s$$

On voit que la puissance totale consommée par le milieu est égale à la puissance délivrée par la source.

Cas du plasma froid. Limite non collisionnelle :

Le noyau de dispersion est de la forme :

$$D(\omega, k) = 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{4\pi}{i\omega} K(\omega)$$

$K(\omega)$ étant indépendant de k , on a deux racines opposées k_1 et k_2 , de classe n et m . Les expressions (32) et (33) donnent :

$$\begin{aligned} P_{\text{ext}}^+ = P_{\text{ext}}^- &= -\frac{2\pi c^2 J_0^2}{\omega^3} \left| \frac{e^{ik_1 \frac{p}{c}} - 1}{k_1 D'_{k_1}} \right|^2 \mathcal{R}(k_1) \\ &= \frac{-\pi J_0^2 \omega (1 - \cos k_1 \frac{p}{c})}{c^2 k_1^3} \quad \text{pour } k_1 \text{ réel} \\ &= 0 \quad \text{pour } k_1 \text{ complexe} \end{aligned}$$

ANNEXE 6

Cas d'une source bien répartie : (Fig 24)

Donnons nous un courant de source de la forme :

$$J(x) = J_0 e^{-\alpha|x|}$$

Sa transformée est :

$$\begin{aligned} J(k) &= J_0 \left\{ \int_{-\infty}^0 dx e^{-ikx} e^{\alpha x} + \int_0^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-\alpha x} \right\} \\ &= J_0 \left\{ \left[\frac{e^{x(\alpha - ik)}}{\alpha - ik} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{-x(\alpha + ik)}}{-(\alpha + ik)} \right]_0^{\infty} \right\} \\ &= J_0 \left\{ \frac{1}{\alpha - ik} + \frac{1}{\alpha + ik} \right\} \end{aligned}$$

$$J(k) = \frac{2\alpha J_0}{\alpha^2 + k^2}$$



Fig 24

Calcul du champ. (Fig 25)

$$E(k) = \frac{4i\pi}{\omega D} \frac{2\alpha J_0}{(\alpha^2 + k^2)}$$

$$E(x) = \frac{4i\alpha J_0}{\omega} \int_{\Gamma} \frac{e^{ikx} dk}{D(\alpha^2 + k^2)}$$

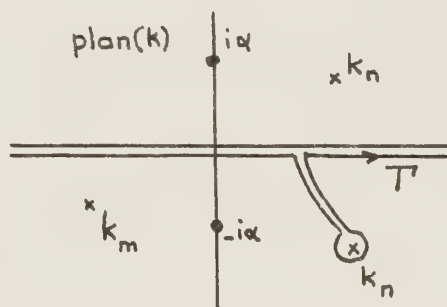


Fig 25

$$x > 0 \quad E(x) = \frac{-8\pi\alpha J_0}{\omega} \left\{ \sum_n \frac{e^{ik_n x}}{(\alpha^2 + k_n^2) D'_{k_n}} + \frac{e^{-\alpha x}}{D(i\alpha) 2i\alpha} \right\}$$

$$x < 0 \quad E(x) = \frac{8\pi\alpha J_0}{\omega} \left\{ \sum_m \frac{e^{ik_m x}}{(\alpha^2 + k_m^2) D'_{k_m}} - \frac{e^{\alpha x}}{D(-i\alpha) 2i\alpha} \right\}$$

Calcul du courant cas EM.

$$J(k) = K E(k) \quad \text{où} \quad K(k_n) = \frac{-i\omega}{4\pi} \left[1 - \frac{k_n^2 c^2}{\omega^2} \right]$$

$$K(i\alpha) = \frac{-i\omega}{4\pi} \left[1 + \frac{\alpha^2 c^2}{\omega^2} - D(i\alpha) \right]$$

$$x > 0 \quad J(x) = 2i\alpha J_0 \left\{ \sum_n \frac{e^{ik_n x} \left[1 - \frac{k_n^2 c^2}{\omega^2} \right]}{(\alpha^2 + k_n^2) D'_{k_n}} + \frac{e^{-\alpha x} \left[1 + \frac{\alpha^2 c^2}{\omega^2} - D(i\alpha) \right]}{2i\alpha D(i\alpha)} \right\}$$

$$x < 0 \quad J(x) = -2i\alpha J_0 \left\{ \sum_m \frac{e^{ik_m x} \left[1 - \frac{k_m^2 c^2}{\omega^2} \right]}{(\alpha^2 + k_m^2) D'_{k_m}} - \frac{e^{\alpha x} \left[1 + \frac{\alpha^2 c^2}{\omega^2} - D(-i\alpha) \right]}{2i\alpha D(-i\alpha)} \right\}$$

Puissance consommée.

1) Composantes non en quadrature, première contribution $\overset{P_1}{\curvearrowright}$ due à :

$$J^+ = -2i\alpha J_0 \frac{c^2}{\omega^2} \left\{ \sum_n \frac{k^2 e^{ikx}}{(\alpha^2 + k^2) D'_{k_n}} - \frac{\alpha^2 e^{-\alpha x}}{2i\alpha D(i\alpha)} \right\}$$

$$J^- = 2i\alpha J_0 \frac{c^2}{\omega^2} \left\{ \sum_m \frac{k^2 e^{ikx}}{(\alpha^2 + k^2) D'_{k_n}} + \frac{\alpha^2 e^{\alpha x}}{2i\alpha D(-i\alpha)} \right\}$$

$$P_1^+ = \frac{16i\alpha^2 J_0^2 c^2}{\omega^3} \pi \left\{ \left[\sum_n \frac{k^2 e^{ikx}}{(\alpha^2 + k^2) D'_k} - \frac{\alpha^2 e^{-\alpha x}}{2i\alpha D(i\alpha)} \right] \left[\sum_n \frac{e^{-ik^*x}}{(\alpha^2 + k^2)^* D'^*_k} - \frac{e^{\alpha x}}{2i\alpha D^*(i\alpha)} \right] + \text{conj} \right\}$$

On pose

$$U = \sum_n \frac{-ik e^{ikx}}{(\alpha^2 + k^2) D'_k} + \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{2i\alpha D(i\alpha)}$$

$$V = \sum_n \frac{e^{-ik^*x}}{(\alpha^2 + k^2)^* D'^*_k} - \frac{e^{\alpha x}}{2i\alpha D^*(i\alpha)}$$

$$P_1^+ = \frac{16i\pi\alpha^2 c^2 J_0^2}{\omega^3} \left\{ [UV]_0^\infty - \int_0^\infty UV' dx + \text{conj} \right\}$$

Or $V' = -U^*$, donc l'intégrale $\int_0^\infty$ est réelle et ne donne pas de contribution. Par ailleurs, $[UV]_\infty \rightarrow 0$ et :

$$U(0) = \sum_n \frac{-ik}{(\alpha^2 + k^2) D'_k} - \frac{i}{2D(i\alpha)} = -\frac{1}{2\pi} \int_T \frac{k dk}{(\alpha^2 + k^2) D(k)}$$

$$V(0) = \sum_n \frac{1}{(\alpha^2 + k^2)^* D'^*_k} + \frac{i}{2\alpha D^*(i\alpha)} = \frac{i}{2\pi} \int_T^* \frac{dk}{(\alpha^2 + k^2) D(k)}$$

$$P_1^+ = \frac{-16i\pi J_0^2 \alpha^2 c^2}{\omega^3} [UV]_0 - \text{conj}$$

de la même façon, on calcule :

$$P_1^- = \frac{16 i \pi J_0^2 \alpha^2 c^2}{\omega^3} [XY]_0 - \text{conj} \quad \text{avec:}$$

$$X = \sum_m \frac{-ik e^{ikx}}{(\alpha^2 + k^2) D_k} + \frac{\alpha e^{\alpha x}}{2i\alpha D(-i\alpha)} \quad Y = \sum_m \frac{e^{-ik^* x}}{(\alpha^2 + k^2)^* D_k^*} + \frac{e^{\alpha x}}{2i\alpha D^*(-i\alpha)}$$

on note que $X(0) = -U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{k dk}{(\alpha^2 + k^2) D(k)}$

$Y(0) = -V(0) = \frac{-i}{2\pi} \int_T^* \frac{dk}{(\alpha^2 + k^2) D(k)}$ par suite :

$$P_1^+ + P_1^- = \frac{16 i \pi J_0^2 \alpha^2 c^2}{\omega^3} \{ [XY]_0 - [UV]_0 \} - \text{conj} = 0$$

2) Il reste la contribution due à :

$$J^+ = -J_0 e^{-\alpha x} = -J_s^+$$

$$J^- = J_0 e^{\alpha x} = -J_s^-$$

qui donne =

$$P = -P_s$$

Puissance consommée par la source :

$$J(x) = J_0 e^{-\alpha|x|} \quad E(x) = \frac{4i\alpha J_0}{\omega} \int_T \frac{e^{ikx} dk}{(\alpha^2 + k^2) D}$$

$$E J^* + E^* J = \frac{4i\pi\alpha J_0^2}{\omega} \int_T \frac{e^{ikx - \alpha|x|} dk}{(\alpha^2 + k^2) D} + \text{conj}$$

On intègre sur x , en notant que :

$$\int_{-\infty}^0 e^{ikx + \alpha x} dx + \int_0^{\infty} e^{ikx - \alpha x} dx = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + k^2} \quad \text{ce qui donne :}$$

$$P_s = \frac{8i\alpha^2 J_0^2}{\omega} \int_T \frac{dk}{(\alpha^2 + k^2)^2 D(k)} + \text{conj.} \quad \text{soit}$$

$$P_s = \frac{-16\alpha^2 J_0^2}{\omega} \text{Im} \int_T \frac{dk}{(\alpha^2 + k^2)^2 D(k)}$$

Ce résultat est bien en accord avec la formule (13) où $\Psi = \frac{8i\pi\alpha J_0}{\omega(\alpha^2 + k^2)}$
Développé, ce résultat peut s'écrire sous deux formes équivalentes :

$$(34) \quad P_s = \frac{16\alpha\pi J_0^2}{\omega} \text{Im} \left\{ \sum_n \frac{1}{(k+i\alpha)(k^2+\alpha^2)D'_k} + \sum_m \frac{1}{(k-i\alpha)(k^2+\alpha^2)D'_k} - \frac{1}{4\alpha^2 D(i\alpha)} - \frac{1}{4\alpha^2 D(-i\alpha)} \right\}$$

$$P_s = \frac{-16\alpha\pi J_0^2}{\omega} \text{Im} \left\{ \sum_n \frac{2i\alpha}{(\alpha^2 + k^2)^2 D'_k} + \frac{1}{2\alpha^2 D(i\alpha)} + \frac{i D'(i\alpha)}{2\alpha D^2(i\alpha)} \right\}$$

(On établit l'équivalence en notant que $\int_C \frac{dk}{(k-i\alpha)(k^2+\alpha^2)D(k)} \equiv 0$).

ANNEXE 7

Sur le choix des coordonnées dans l'espace $(\vec{k})$. -

En général, les vecteur $\vec{E}(\omega, \vec{k})$ et $\vec{\Psi}(\omega, \vec{k})$ sont liés par l'équation :

$$\vec{D} \vec{E} = \vec{\Psi}$$

Le tenseur $\vec{D}$ est représenté par une matrice $\{D\}$ dont la forme dépend du choix des coordonnées mais dont les valeurs propres D_1 D_2 D_3 et les directions propres $\vec{X}_1$ $\vec{X}_2$ $\vec{X}_3$ sont invariants.

Si $\vec{\Psi}$ est dirigé suivant une direction propre $\vec{X}_1$, on peut écrire :

$$\vec{D} \vec{E} = D_1 \vec{E} = \vec{\Psi}$$

C'est le cas qui a été étudié dans ce travail. On peut s'y ramener lorsque les directions propres de $\{D\}$ sont orthogonales : il suffit de décomposer $\vec{\Psi}$ suivant ces directions propres et de calculer la puissance en ajoutant les 3 contributions. Lorsque les directions propres ne sont pas orthogonales, on peut encore décomposer $\vec{\Psi}$ suivant les directions propres, mais les produits scalaires des vecteurs de base donneront 6 contributions supplémentaires.

Pour préciser, écrivons la matrice $\{D\}$ pour un plasma froid dans un système où ox est dans le plan $(\vec{k}, \vec{B}_0)$

$$\{D\} = \{1\} - \frac{c^2}{\omega^2} \{h\} + \frac{4\pi}{i\omega} \{K\} \quad \text{où}$$

$$\{h\} = k^2 \delta_{ij} - k_i k_j, \text{ et}$$

$$\{K\} = \frac{i\omega}{4\pi} \begin{vmatrix} a & ib & 0 \\ -ib & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} \quad (a, b, c, \text{ complexes})$$

.../

Les valeurs propres $\alpha = D_1, D_2, D_3$ sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\left(1 + a - \frac{c^2}{\omega^2} k_z^2 - \alpha\right) \left(1 + a - \frac{c^2}{\omega^2} k^2 - \alpha\right) \left(1 + q - \frac{c^2}{\omega^2} k_x^2 - \alpha\right) - b^2 \left(1 + q - \frac{c^2}{\omega^2} k_x^2 - \alpha\right) - \left(\frac{c^2}{\omega^2} k_x k_z\right)^2 \left(1 + a - \frac{c^2}{\omega^2} k^2 - \alpha\right) = 0$$

Et les directions propres $\vec{X} = \vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3$ sont données par :

$$\begin{cases} x = \frac{\omega^2}{c^2 k_x k_z} \left(\alpha - q - 1 + \frac{c^2}{\omega^2} k_x^2 \right) \\ y = \frac{\omega^2 b}{c^2 k_x k_z} \frac{\left(\alpha - q - 1 + \frac{c^2}{\omega^2} k_x^2 \right)}{\left(1 + a - \alpha - \frac{c^2}{\omega^2} k^2 \right)} \\ z = 1 \end{cases}$$

On sait que $D_1 D_2 D_3 = \det \{ D \}$

L'équation caractéristique se simplifie dans deux cas importants : $k_x = 0$ et $k_z = 0$

1°/ $k_x = 0$ (propagation parallèle). On a :

$$\left(1 + q - \alpha\right) \left\{ \left(1 + a - \alpha - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right)^2 - b^2 \right\} = 0$$

Les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} D_1 = 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + a + b \\ D_2 = 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + a - b \\ D_3 = 1 + q \end{cases}$$

Les directions propres sont :

$$X_1 = \begin{vmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix} \quad X_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix} \quad X_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

On reconnaît les directions tournantes (1 et 2) correspondant aux deux polarisations des ondes transverses et la direction (3) longitudinale des ondes électrostatiques. Ces directions propres sont orthogonales puisque $\vec{X}_1 \cdot \vec{X}_2^* = 0$ etc...

2°/ En l'absence de champ magnétique B_0 , on peut faire $k_x = 0$. On a de plus :

$$b = 0 \quad a = c$$

Les valeurs propres D_1 et D_2 coïncident et les directions propres X_1 et X_2 sont arbitraires.

3°/ $k_z = 0$ (propagation perpendiculaire). On a :

$$\left(1 + c - \alpha - \frac{k_c^2 c^2}{\omega^2}\right) \left\{ \left(1 + \alpha - \alpha\right) \left(1 + \alpha - \alpha - \frac{k_c^2 c^2}{\omega^2}\right) - b^2 \right\} = 0$$

Les valeurs propres sont :

$$D_1 = 1 + \alpha - \frac{k_c^2 c^2}{2\omega^2} + \sqrt{b^2 + \left(\frac{k_c^2 c^2}{2\omega^2}\right)^2}$$

$$D_2 = 1 + \alpha - \frac{k_c^2 c^2}{2\omega^2} - \sqrt{b^2 + \left(\frac{k_c^2 c^2}{2\omega^2}\right)^2}$$

$$D_3 = 1 + c - \frac{k_c^2 c^2}{\omega^2}$$

Les directions propres sont :

$$X_1 = \begin{vmatrix} -\frac{k_c^2 c^2}{\omega^2} - \sqrt{b^2 + \left(\frac{k_c^2 c^2}{2\omega^2}\right)^2} \\ ib \\ 0 \end{vmatrix} \quad X_2 = \begin{vmatrix} -\frac{k_c^2 c^2}{\omega^2} + \sqrt{b^2 + \left(\frac{k_c^2 c^2}{2\omega^2}\right)^2} \\ ib \\ 0 \end{vmatrix} \quad X_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Elles ne sont orthogonales que si b est réel (cas non-collisionnel).

Dans le cas général (plasma chaud, $\vec{\psi}$ et $\vec{k}$ quelconques), on a intérêt à effectuer un changement d'axes qui diagonalise la matrice $\{D\}$. Si les directions propres sont $\vec{X}_1(x_1 y_1 z_1)$, $\vec{X}_2(x_2 y_2 z_2)$, $\vec{X}_3(x_3 y_3 z_3)$

le changement d'axes approprié est défini par la matrice :

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{Bmatrix} = X_i^j$$

L'invariant $E \cdot J^* + E^* \cdot J$ s'écrit :

$$E_i^* J^i + E_i^* J^i = g_{ij} E^j J^i + g_{ij}^* E^j J^i = g_{ij} \frac{\psi^j J^i}{D^j} + g_{ij}^* \frac{\psi_j^* J^i}{D_j^*}, \text{ soit :}$$

$$E_i J_i^* + E_i^* J_i = \frac{4\pi}{\omega} \left[g_{ij} \frac{J^j J_i^*}{D^j} - g_{ij}^* \frac{J^j J_i}{D_j^*} \right]$$

La formule (12), dans le cas général tridimensionnel, prend la forme :

$$P_s = -\frac{1}{\pi^2 \omega} \operatorname{Im} \int d\mathbf{k} \, g_{ij} \frac{J^j J_i^*}{D^j} \quad \text{où} \quad J^i(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \, J^i(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

On retrouve le cas simple étudié plus haut dans le cas d'une métrique orthogonale, où $g_{ij} = \delta_{ij}$

REFERENCES

- [1] P.A. STURROCK - *Phys. Rev.*, 112, 1488, (1959)
- [2] P. ROLLAND - *Phys. Rev.*, 140, 776, (1965)
- [3] J.E. DRUMMOND - *J. Nucl. Energy Part C*, 2, 1961, p. 98.
- [4] W.P. ALLIS, S.J. BUCHSBAUM, A. BERS - *Waves in anisotropic plasmas* (MIT Press, Cambridge, Mass.)

Manuscrit reçu le 10 juin 1969

Deuxième Thèse

Propositions données par la Faculté

Vu et approuvé :

Orsay, le 19 Juillet 1968

Le Doyen de la Faculté des Sciences

G. POITOU

